Cahier d'analogie:
2. Vue algébrique

Yves Lepage

Version 1, septembre 2020
Version 2, mars 2023

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ces notes reprennent les éléments enseignés dans nos cours sur l'analogie donnés en maîtrise depuis bientôt dix ans à l'école information, production et systèmes de l'université Waseda. Les cours étaient donnés à partir de transparents. Il en manquait une version mise au propre en français. Le présent cahier, et ceux qui devraient suivre, sont destinés à remplir ce manque.

Après avoir présenté les axiomes de l'analogie, nous cherchons à les appliquer à plusieurs structures algébriques élémentaires bien connues.

Les axiomes que nous présentons sont plus lâches que ceux présentés habituellement. En particulier, alors que l'égalité est d'habitude placée au cœur de l'analogie, nous utilisons une autre notion, la conformité, dont les propriétés seront déterminées par les axiomes de l'analogie.

Chapitre 2

Applications des axiomes de l'analogie aux structures algébriques élémentaires

2.1 Analogies induite par la structure de magma

2.1.1 Première sorte d'analogie

Soit $(\mathcal{E}, \star)$ un magma. On peut définir une première sorte d'analogie en utilisant la structure de magma. On pose l'équivalence définitoire suivante.

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, \quad A : B :: C : D \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \quad A \star D = B \star C$$

L'axiome de réflexivité de la conformité impose alors que $\star$ soit commutative.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad A : B :: A : B \quad \Leftrightarrow \quad \forall (a, b) \in \mathcal{E}^2, \; A \star B = B \star A$$

Dans le cas où $\star$ n'est pas commutative sur $\mathcal{E}$, cette analogie n'existe tout simplement pas.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où la loi est commutative, tous les autres axiomes (I), (II), (V) et (VI), c'est-à-dire symétrie de la conformité, inversion des rapports, échange des extrêmes et échange des moyens, dérivent immédiatement de la commutativité de $\star$. La question de l'inversion des objets et de la distribution dans les objets reste en suspens, mais il n'y a donc pas grand-chose à dire de cette analogie.

2.1.2 Seconde sorte d'analogie

Soit toujours $(\mathcal{E}, \star)$ un magma. Une deuxième sorte d'analogie peut être tout aussi naturellement induite de la structure de magma.

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, \quad A : B :: C : D \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} A \star D = C \star B$$

Le lecteur doit bien noter que l'on pose cette fois $C \star B$, et non plus $B \star C$ comme précédemment.

Dans ce cas on a le tableau suivant pour les axiomes.

(O)	réflexivité de la *conformité*	$A \star B = A \star B$
		$A \star D = C \star B$
(I)	symétrie de la *conformité*	$C \star B = A \star D$
(II)	inversion des *rapports*	$B \star C = D \star A$
(III)	inversion des *objets*	(l'inverse est à definir)
(IV)	distribution dans les *objets*	(la notion de trait est à définir)
(V)	échange des extrêmes	$D \star A = C \star B$
(VI)	échange des moyens	$A \star D = B \star C$

On examine chaque axiome l'un après l'autre en espérant prouver que chacun d'eux dérive naturellement de la structure de magma. On sait certes que deux seulement des axiomes (I), (II), (V) et (VI) impliquent automatiquement les autres. Mais le propos ici est d'identifier les endroits où les démonstrations bloquent. On examine donc tous les axiomes. On suppose que A, B, C et D sont des éléments quelconques de $\mathcal{E}$.

(0) **Réflexivité de la conformité**

Elle découle de la définition directement.

$$A : B :: A : B \;\Leftrightarrow A \star B = A \star B$$

(i) **Symétrie de la conformité**

Elle découle aussi de la définition car l'égalité est symétrique.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D &\Leftrightarrow A \star D = C \star B \\ &\Leftrightarrow C \star B = A \star D \\ &\Leftrightarrow C : D :: A : B \end{aligned}$$

(II) **Inversion des rapports**

Il manque une étape dans la démonstration qui permettrait d'obtenir cet axiome. On notera immédiatement que, si $\star$ est commutative, alors l'étape peut être franchie, grâce aussi à la symétrie de l'égalité.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D &\Leftrightarrow A \star D = C \star B \\ &\Leftrightarrow \textbf{étape manquante} \\ &\Leftrightarrow B \star C = D \star A \\ &\Leftrightarrow B : A :: D : C \end{aligned}$$

(iii) **Inversion des objets**

Cet axiome est laissé en suspens.

(iv) **Distribution in objets**

Cet axiome est aussi laissé en suspens.

(v) **Échange des extrêmes**

De la même manière que pour l'inversion des rapports, une étape manque pour induire, en toute généralité, cet axiome à partir de la structure de magma. De la même manière aussi, on notera que si $\star$ est commutative, alors l'étape se franchit aisément, sans même avoir recours à la symétrie de l'égalité.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D &\Leftrightarrow A \star D = C \star B \\ &\Leftrightarrow \textbf{étape manquante} \\ &\Leftrightarrow D \star A = C \star B \\ &\Leftrightarrow D : B :: C : A \end{aligned}$$

(vi) **Échange des moyens**

Mêmes remarques que pour l'échange des extrêmes.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D &\Leftrightarrow A \star D = C \star B \\ &\Leftrightarrow \textbf{étape manquante} \\ &\Leftrightarrow A \star D = B \star C \\ &\Leftrightarrow A : C :: B : D \end{aligned}$$

2.1.3 Cas des magmas commutatifs

Soit $(\mathcal{E}, \star)$ un magma pour lequel l'opération interne $\star$ est commutative. Alors, d'après les remarques précédentes, tous les axiomes sont vérifiés pour la seconde sorte d'analogie. On a bien l'inversion des rapports, l'échange des moyens, l'échange des extrêmes, et donc les huit formes équivalentes de l'analogie puisque que l'on avait déjà la réflexivité et la symétrie de la conformité.

On observe alors que la seconde sorte d'analogie sur le magma est égale à la première sorte d'analogie. On conclut donc que, pour avoir une analogie naturelle sur un magma, il suffit que l'opération interne soit commutative ; il n'y a alors qu'une seule analogie induite naturellement. Bien sûr, les axiomes d'inversion des objets et de distribution dans les objets restent à préciser pour définir complètement l'analogie au sens où nous l'entendons.

On notera surtout que dans un tel cas, celui du magma commutatif, ni la notion de conformité, ni la notion de rapport n'ont été définies directement.

2.1.4 Cas des magmas réguliers

La question de savoir si tout marche bien dans le cas d'un magma régulier est laissée en suspens.

2.1.5 Résolution d'équations analogiques sur un magma commutatif

Le problème de la résolution d'équations analogiques sur un magma commutatif est le suivant. Étant donné un triplet $(A, B, C) \in \mathcal{E}^3$, trouver D tel que $A : B :: C : D$, c'est-à-dire, tel que $A \star D = C \star B$. Il est évident que l'on ne peut rien dire dans la cas général.

2.2 Analogies remarquables

Dans un semi-groupe commutatif $(\mathcal{E}, \star)$, on a l'analogie remarquable suivante.

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \quad A : B :: A \star C : B \star C$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} A \star B \star C = A \star B \star C &\Leftrightarrow A \star B \star C = B \star A \star C \quad \text{(commutativité)} \\ &\Leftrightarrow A \star (B \star C) = B \star (A \star C) \quad \text{(associativité)} \\ &\Leftrightarrow \quad A : B :: A \star C : B \star C \quad \text{(définition)} \end{aligned}$$

L'analogie remarquable précédente implique l'analogie remarquable suivante. Dans un monoïde commutatif $(\mathcal{E}, \star)$, avec e pour élément neutre,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad e : A :: B : A \star B$$

Cette analogie est remarquable car elle énonce qu'un objet est à l'élément neutre ce que cet objet composé avec un autre élément est à cet autre élément. Cette analogie est naturelle avec des nombres et l'addition ou la multiplication comme opération interne : Il est naturel d'écrire $0 : 3 :: 2 : 5$ ou $1 : 3 :: 2 : 6$.

2.3 Analogie induite par la structure de groupe

Soit $(\mathcal{E}, \star)$ un groupe. Nous notons a^{-1} l'élément opposé de a.

— Les rapports peuvent être définis directement par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \quad A : B = A \star B^{-1}$$

Il faut bien noter que cette définition du rapport est très particulière : le rapport entre deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$. Cela est très différent de la situation du magma, et donc en particulier du monoïde, dans laquelle, en toute généralité, on ne sait pas ce qu'est un rapport.

— La conformité peut être définie comme étant l'égalité.

— L'équivalence définitoire de l'analogie est alors la suivante :

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, \quad A : B :: C : D \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} A \star B^{-1} = C \star D^{-1}$$

2.3.1 Prérequis

— Inversion d'un rapport :

$$\left(A \star \ B^{-1}\right)^{-1} = B \star \ A^{-1}$$

La démonstration se fait à l'aide des deux propriétés d'opposé d'un calcul et d'égalité d'un élément avec l'opposé de son opposé. $(A \star\ B^{-1})^{-1} = B^{-1^{-1}} \star\ A^{-1} = B \star\ A^{-1}$

Nous pouvons alors transcrire les propriété de l'analogie en utilisant les notations du groupe et les propriétés que nous venons de voir. C'est l'objet du tableau qui suit.

(0)	réflexivité de la *conformité*	$A \star B^{-1} = A \star B^{-1}$
		$A \star B^{-1} = C \star D^{-1}$
(I)	inversion de la *conformité*	$C \star D^{-1} = A \star B^{-1}$
(II)	inversion des *rapports*	$B \star A^{-1} = D \star C^{-1}$
(III)	inversion des *objets*	$A^{-1} \star (B^{-1})^{-1} = C^{-1} \star (D^{-1})^{-1}$
(IV)	distribution dans les *objets*	tout trait de A doit se retrouver soit dans B soit dans C soit dans les deux à la fois.
(V)	Echange des extrêmes	$D \star B^{-1} = C \star A^{-1}$
(VI)	Echange des moyens	$A \star C^{-1} = B \star D^{-1}$

Si la conformité est l'égalité, la conformité est alors non seulement une relation de dépendance, mais aussi une relation d'equivalence. C'est-à-dire, que la *réflexivité,* la *symétrie* et la *transitivité* sont vérifiées. On essaie alors de prouver les propriétés fondamentales de l'analogie.

(0) Réflexivité de la conformité. Elle est trivialement impliquée par la réflexivité de l'égalité.

$$A : B :: A : B \ \Leftrightarrow A \star B^{-1} = A \star B^{-1}$$

(I) Symétrie de la conformité. Elle est trivialement impliquée par la symétrie de l'égalité.

$$\begin{aligned} &(\ A : B :: C : D \ \Rightarrow \ \ C : D :: A : B\ ) \\ &\Leftrightarrow (A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \Rightarrow C \star D^{-1} = A \star B^{-1}) \end{aligned}$$

(ii) **Inversion des rapports**.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D \ &\Leftrightarrow A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\ &\Leftrightarrow \left(B \star A^{-1}\right)^{-1} = \left(D \star C^{-1}\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow (B \star A^{-1}) = (D \star C^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \quad B : A :: D : C \end{aligned}$$

Chacune des lignes précédentes s'explique par la définition de l'analogie induite par la structure de groupe, par l'opposé d'un calcul, par l'égalité d'un élément avec l'opposé de son opposé, et de nouveau par la définition de l'analogie induite par la structure de groupe.

(iii) **Inversion des objets**.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D \ &\Leftrightarrow A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\ &\Leftrightarrow A \star B^{-1} \star B = C \star D^{-1} \star B \\ &\Leftrightarrow A = C \star D^{-1} \star B \\ &\Leftrightarrow C^{-1} \star A = C^{-1} \star C \star D^{-1} \star B \\ &\Leftrightarrow C^{-1} \star A = D^{-1} \star B \\ &\Leftrightarrow D^{-1} \star B = C^{-1} \star A \\ &\Leftrightarrow D^{-1} \star \left(B^{-1}\right)^{-1} = C^{-1} \star \left(A^{-1}\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad D^{-1} : B^{-1} :: C^{-1} : A^{-1} \end{aligned}$$

Chacune des lignes précédentes s'explique par la définition de l'analogie induite par la structure de groupe, par application de la loi interne à droite dans les deux membres d'une égalité, par la définition de l'élément neutre, par application de la loi interne à gauche dans les deux membres d'une égalité, de nouveau par la définition de l'élément neutre, par la symétrie de l'égalité, par l'égalité d'un élément avec l'opposé de son opposé et enfin par la définition de l'analogie induite par la structure de groupe.

On espérait obtenir $A^{-1} : B^{-1} :: C^{-1} : D^{-1}$, mais ce n'est pas tout à fait ce que l'on obtient, à l'échange des extrêmes près. Il nous faudrait donc attendre de voir si celui-ci est obtenu directement pour conclure. Nous verrons plus bas qu'essayer d'obtenir directement l'échange des extrêmes ou des moyens revient à demander l'inversion des objets.

Examinons donc directement les conséquences du fait de postuler l'inversion des objets.

$$\forall(A,B,C,D) \in \mathcal{E}^4, \quad A : B :: C : D \;\Leftrightarrow\; A^{-1} : B^{-1} :: C^{-1} : D^{-1}$$

$$\begin{aligned} & A : B :: C : D \\ \Leftrightarrow\;& A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\ \Leftrightarrow\;& A = C \star D^{-1} \star B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A^{-1} : B^{-1} :: C^{-1} : D^{-1} \\ \Leftrightarrow\;& A^{-1} \star \left(B^{-1}\right)^{-1} = C^{-1} \star \left(D^{-1}\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow\;& A^{-1} \star B = C^{-1} \star D \\ \Leftrightarrow\;& B^{-1} \star A = D^{-1} \star C \\ \Leftrightarrow\;& A = B \star D^{-1} \star C \end{aligned}$$

Les deux égalités ci-dessus impliquent que :

$$\forall(B,C,D) \in \mathcal{E}^3, \;\; B \star D^{-1} \star C = C \star D^{-1} \star B$$

Il est autorisé de poser $D^{-1} = e = D$ puisque l'égalité est vraie quel que soit D. On a alors :

$$\forall(B,C) \in \mathcal{E}^2, \; B \star C = C \star B$$

ce qui est la définition de la commutativité de l'opération interne. Or, la commutativité implique trivialement l'équivalence précédente

$$A = B \star D^{-1} \star C \;\Leftrightarrow\; A = C \star D^{-1} \star B$$

En résumé, le postulat de l'inversion des objets est équivalent à la commutativité de l'opération interne.

(iv) **Distribution dans les objets**.

Reste à définir...

(v) **Échange des extrêmes**.

$$\begin{aligned} A : B :: C : D \;&\Leftrightarrow A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\ &\Leftrightarrow A^{-1} \star A \star B^{-1} = A^{-1} \star C \star D^{-1} \\ &\Leftrightarrow B^{-1} = A^{-1} \star C \star D^{-1} \\ &\Leftrightarrow B^{-1} \star D = A^{-1} \star C \star D^{-1} \star D \\ &\Leftrightarrow B^{-1} \star D = A^{-1} \star C \\ &\Leftrightarrow \left(D^{-1} \star B\right)^{-1} = \left(C^{-1} \star A\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow D^{-1} \star \left(B^{-1}\right)^{-1} = C^{-1} \star \left(A^{-1}\right)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad D^{-1} : B^{-1} :: C^{-1} : A^{-1} \end{aligned}$$

Chacune des lignes précédentes s'explique par la définition de l'analogie induite par la structure de groupe, par application de la loi interne à gauche dans les deux membres d'une égalité, par la définition de l'élément neutre, par application de la loi interne à droite dans les deux membres d'une égalité, de nouveau par la définition de l'élément neutre, par l'opposé d'un calcul, par l'égalité de l'opposé d'un opposé avec l'élément de départ et enfin par la définition de l'analogie induite par la structure de groupe.

Ce que nous obtenons n'est pas exactement ce que nous voulions. Nous nous retrouvons dans une situation similaire à celle pour l'inversion des objets. Alors que, pour obtenir l'inversion des objets, nous demandions l'échange des extrêmes, pour obtenir l'échange des extrêmes, nous demandons l'inversion des objets.

(VI) **Échange des moyens**. Ce serait une conséquence de (II) et (V), comme vu dans le cahier 1, paragraphe 2.3.3, si nous avions l'échange des extrêmes. En effet, l'application de l'inversion des rapports, de l'échange des extrêmes et encore une fois de l'inversion des rapports donne l'échange des moyens.

On peut aussi essayer de l'obtenir directement.

$$
\begin{aligned}
A : B :: C : D &\Leftrightarrow A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\
&\Leftrightarrow C^{-1} \star A \star B^{-1} \star B = C^{-1} \star C \star D^{-1} \star B \\
&\Leftrightarrow C^{-1} \star A = D^{-1} \star B \\
&\Leftrightarrow (A^{-1} \star C)^{-1} = (B^{-1} \star D)^{-1} \\
&\Leftrightarrow A^{-1} \star C = B^{-1} \star D \\
&\Leftrightarrow A^{-1} \star (C^{-1})^{-1} = B^{-1} \star (D^{-1})^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad A^{-1} : C^{-1} :: B^{-1} : D^{-1}
\end{aligned}
$$

On se retrouve dans la même situation que pour l'échange des extrêmes. On aimerait avoir l'inversion des objets pour conclure.

2.3.2 Statut de la commutativité

Revenons sur l'interaction entre l'inversion des objets vue en (III), l'échange des extrêmes vu en (V) et l'échange des moyens vu en (VI). Nous avions vu que l'échange des moyens ou des extrêmes demandent l'inversion des objets.

Pour résumer, à condition que le groupe soit commutatif, la structure de groupe entraîne tous les axiomes de l'analogie à l'exception de l'axiome de distribution.

Chapitre 3

Compatibilité des analogies du magma et du groupe

Tout groupe étant un magma, se pose la question de savoir si les deux analogies induites, l'une par la structure de magma et l'autre par la structure de groupe, sont les mêmes.

La question n'a de sens, on l'a vu que si la loi interne du magma est commutative. Si ce n'est pas le cas, nous ne pouvons pas définir d'analogie à partir de la structure de magma. La loi interne est donc commutative. Il est alors aisé de vérifier que :

$$
\begin{aligned}
A : B \overset{\text{mgm}}{::} C : D \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} & A \star D = C \star B \\
& \text{par définition de l'analogie induite par le magma} \\
& \Leftrightarrow A \star D \star B^{-1} = C \star B \star B^{-1} \\
& \text{par application de la loi interne à droite aux} \\
& \text{deux membres d'une égalité} \\
& \Leftrightarrow A \star D \star B^{-1} = C \\
& \text{par définition de l'élément neutre} \\
& \Leftrightarrow A \star B^{-1} \star D = C \\
& \text{par commutativité de la loi interne} \\
& \Leftrightarrow A \star B^{-1} \star D \star D^{-1} = C \star D^{-1} \\
& \text{par application de la loi interne à droite aux} \\
& \text{deux membres d'une égalité} \\
& \Leftrightarrow A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\
& \text{par définition de l'élément neutre} \\
& \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \ A : B \overset{\text{grp}}{::} C : D \\
& \text{par définition de l'analogie induite sur un groupe}
\end{aligned}
$$

Chacune des lignes de la démonstration précédente est obtenue respectivement par la définition de l'analogie induite par le magma, l'application de la loi interne à droite aux deux membres d'une égalité, la définition de l'élément neutre, la commutativité de la loi interne, l'application de la loi interne à droite aux deux membres d'une égalité, la définition de l'élément neutre et la définition de l'analogie induite sur un groupe.

3.1 Résolution d'équations analogiques

3.1.1 Cas général

Soit $(\mathcal{E}, \star)$ un groupe. Toute équation analogique de la forme $A : B :: C : x$ admet deux solutions. La première solution est donnée par :

$$\begin{aligned}
A : B :: C : x \;\Leftrightarrow\;& \; x : C :: B : A \\
& \text{par inversion de la lecture pour l'analogie,} \\
& \Leftrightarrow \; x \star C^{-1} = B \star A^{-1} \\
& \text{par définition de l'analogie induite sur un groupe,} \\
& \Leftrightarrow \; x \star C^{-1} \star C = B \star A^{-1} \star C \\
& \text{par application de la loi interne à droite} \\
& \text{aux deux membres d'une égalité,} \\
& \Leftrightarrow \; x = B \star A^{-1} \star C \\
& \text{par définition de l'élément neutre.}
\end{aligned}$$

L'échange des moyens donne l'autre solution : $C \star A^{-1} \star B$.

3.1.2 Cas du groupe commutatif

Comme le groupe doit être commutatif, il y a alors égalité des deux solution précédentes :

$$B \star A^{-1} \star C = C \star A^{-1} \star B$$

On en conclut que, dans un groupe commutatif, toute équation analogique admet une unique solution, qui s'écrit de six façons différentes, mais égales :

$$\begin{aligned}
& A^{-1} \star B \star C = A^{-1} \star C \star B \\
= \; & B \star A^{-1} \star C = B \star C \star A^{-1} \\
= \; & C \star A^{-1} \star B = C \star B \star A^{-1}
\end{aligned}$$

3.2 Potentiel analogique et sens logique de la conformité

On a la propriété suivante :

$$
\begin{aligned}
A : B :: C : D \; & \Leftrightarrow A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\
& \text{par définition de l'analogie induite sur un groupe} \\
& \Leftrightarrow (A \star B^{-1}) \star (C \star D^{-1})^{-1} = (C \star D^{-1}) \star (C \star D^{-1})^{-1} \\
& \text{par application de la loi interne à droite} \\
& \text{aux deux membres d'une égalité,} \\
& \Leftrightarrow (A \star B^{-1}) \star (C \star D^{-1})^{-1} = e \\
& \text{par définition de l'élément neutre,} \\
& \Leftrightarrow \; (\ A : B\ ) : (\ C : D\ ) \; = e \\
& \text{par définition du rapport pour l'analogie} \\
& \text{induite sur un groupe.}
\end{aligned}
$$

En d'autres termes, l'analogie se définit comme l'égalité du rapport des rapports des termes du membre gauche d'une part et des termes du membre droit d'autre part avec l'élément neutre du groupe.

Pour les analogies arithmétiques et géométriques, c'est-à-dire les analogies induites sur les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$, cette définition de l'analogie se transcrit :

$$(a-b)-(c-d) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = 1.$$

$$A \text{ est conforme à } B \quad \Leftrightarrow \quad A :: B \quad \Leftrightarrow \quad A : B = e = A : A = B : B$$

3.3 Analogie sur les opposés des objets

Comment définir l'analogie entre les opposés des objets ?

$B \star C \star D : A \star C \star D :: D \star A \star B : C \star A \star B$

L'analogie entre les opposés des objets est vérifiée pour les analogies arithmétique et géométrique.

$B + C + D : A + C + D :: D + A + B : C + A + B$

$B \times C \times D : A \times C \times D :: D \times A \times B : C \times A \times B$

Dans un groupe,

$$
\begin{aligned}
& B \star C \star D : A \star C \star D :: D \star A \star B : C \star A \star B \\
\Leftrightarrow\ & B \star C \star D \star (A \star C \star D)^{-1} = D \star A \star B \star (C \star A \star B)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & B \star C \star D \star D^{-1} \star C^{-1} \star A^{-1} = D \star A \star B \star B^{-1} \star A^{-1} \star C^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & B \star A^{-1} = D \star C^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & (B \star A^{-1})^{-1} = (D \star C^{-1})^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & A \star B^{-1} = C \star D^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \quad A : B :: C : D
\end{aligned}
$$

3.4 Similarité et contiguïté

Posons $E = A \star B \star C \star D$.
$A : B :: C : D \ \Leftrightarrow \ E \star A : E \star B :: C : D$
$A : B :: C : D \ \Leftrightarrow \ A \star E : B \star E :: C : D$

3.5 Inversion des rapports et rapport des opposés

Pour une analogie sur un groupe, la commutativité de $\star$ implique :

$$A : B :: B^{-1} : A^{-1}$$

parce que

$$A \star B^{-1} = B^{-1} \star (A^{-1})^{-1} = B^{-1} \star A$$

Pour une analogie sur un groupe :

$$
\begin{aligned}
A : e :: e : A^{-1} \ \Leftrightarrow \quad A : e &= A \star e^{-1} \\
&= A \star e \\
&= A \\
&= e \star A \\
&= e \star (A^{-1})^{-1} \\
&= e : A^{-1}
\end{aligned}
$$

Ou en posant simplement $B = e$ dans la formule plus haut si on a la commutativité.

Sur un monoïde, il faut se demander s'il existe un couple d'éléments (A, B) tel qu'il existe un opposé à droite pour A (ou un opposé à gauche pour B)

$$A : e :: e : B \ \Leftrightarrow \ A \star B = e \star e = e$$

3.6 Analogie entre ensembles

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cap)$ et $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cup)$ sont des monoïdes commutatifs. Ils donnent deux analogies possibles.

$$A : B \overset{\cap}{::} C : D \ \Leftrightarrow A \cap D = C \cap B$$
$$A : B \overset{\cup}{::} C : D \ \Leftrightarrow A \cup D = C \cup B$$

Sans le postulat d'inversion des objets, ces analogies sont différentes.

Si l'on ajoute le postulat d'inversion des objets, et en prenant l'opposé d'un objet comme son complément dans un univers donné, les deux conditions sont remplies en même temps.

Une autre façon de faire est la suivante.

Nous montrons que la conjonction des deux analogies par les deux structures de monoïdes $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cap)$ et $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cup)$ implique une analogie de même type que celle induite par la structure du groupe $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \vartriangle)$ (ou, de façon semblable, $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \doteq)$).

On a la même chose pour $(\mathbb{B}, \wedge)$, $(\mathbb{B}, \vee)$, $(\mathbb{B}, \vartriangle)$ et $(\mathbb{B}, \doteq)$.

Attention : il n'y a pas équivalence.

$$\begin{aligned}
A : B \overset{\cap}{::} C : D \ \wedge \ A : B \overset{\cup}{::} C : D & \\
& \Leftrightarrow (A \cap D) = (C \cap B) \wedge (A \cup D) = (C \cup B) \\
& \color{red}{\Rightarrow} \color{black}{} \ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (C \setminus D) \cup (D \setminus C) \\
& \Leftrightarrow A \vartriangle B = C \vartriangle D \Leftrightarrow \ A : B \overset{\vartriangle}{::} C : D \\
& \Leftrightarrow A \doteq B = C \doteq D \Leftrightarrow \ A : B \overset{\doteq}{::} C : D
\end{aligned}$$

On observe que l'analogie induite par la structure de groupe commutatif de $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \vartriangle)$ (ou, de façon semblable, $(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \doteq)$) est la même que lorsque les deux analogies induites par les deux monoïdes sont vérifiées en même temps, sous une certaine condition.

$$\begin{aligned}
A : B \overset{\vartriangle}{::} C : D \ & \Leftrightarrow \\
A : B \overset{\doteq}{::} C : D \ & \Leftrightarrow A \vartriangle B = C \vartriangle D \\
& \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
& \Leftrightarrow (A \cap D) = (C \cap B) \wedge (A \cup D) = (C \cup B) \\
& \Leftrightarrow \ A : B \overset{\cap}{::} C : D \ \wedge \ A : B \overset{\cup}{::} C : D
\end{aligned}$$

dans le cas où l'on a $A \subset B \cup C$ et $A \supset B \cap C$.

A	B	C	D	(a) $A \cap D = C \cap B$	(b) $A \cup D = C \cup B$	analogies sur les deux monoïdes (a) $\wedge$ (b)	(c) $A \vartriangle B = \mathcal{E} \setminus (A \doteq B)$	(d) $C \vartriangle D = \mathcal{E} \setminus (C \doteq D)$	analogie sur le groupe (c) = (d)
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

Dans le tableau précédent, les deux lignes isolées correspondent aux cas où aucune des deux analogies, celle induite par le monoïde avec l'opération d'union et celle induite par le monoïde avec l'opération d'intersection, ne sont vérifiées. Cependant, l'analogie induite par le groupe est vérifiée. Cela correspond aux cas où soit $A \subset B \cup C$, soit $A \supset B \cap C$, n'est pas vérifié : $A \supset B \cap C$ n'est pas vérifié sur la première ligne ; $A \subset B \cup C$ n'est pas vérifié sur la seconde ligne.

Le tableau précédent peut être interprété comme le tableau des deux analogies induites sur $(\mathbb{B}, \wedge)$ et $(\mathbb{B}, \vee)$ d'une part et sur le groupe $(\mathbb{B}, \oplus)$ d'autre part (ou, de façon similaire, sur le groupe $(\mathbb{B}, \Leftrightarrow)$). Cela découle de la correspondance donnée dans le tableau suivant.

Loi interne d'ensemble		Loi interne sur les valeurs logiques	
intersection	$\cap$	et	$\wedge$
union	$\cup$	ou	$\vee$
différence symétrique	$\triangle$	ou exclusif	$\oplus$
loi interne sans nom	$\doteq$	équivalence logique	$\Leftrightarrow$
sous-ensemble	$\subset$	condition nécessaire	$\Rightarrow$
sur-ensemble	$\supset$	condition suffisante	$\Leftarrow$

A	B	C	D	(a) $A \wedge D = C \wedge B$	(b) $A \vee D = C \vee B$	analogies sur les deux monoïdes (a) $\wedge$ (b)	(c) $A \oplus B = \neg(A \Leftrightarrow B)$	(d) $C \oplus D = \neg(C \Leftrightarrow D)$	analogie sur le groupe (c) = (d)
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

Les deux lignes marqués en rouge correspondent aux cas où les analogies induites par les deux monoïdes, équipés l'un avec $\wedge$ et l'autre avec $\vee$, ne sont pas vérifiées. Cependant, sur ces lignes l'analogie induite par le groupe marche.

Ces deux lignes correspondent aux cas où les deux propositions $A \Rightarrow B \vee C$ et $A \Leftarrow B \wedge C$ ne sont pas simultanément vérifiées. Ces deux conditions peuvent être réécrites de la façon suivante : $\neg A \vee B \vee C$ et $A \vee \neg B \vee \neg C$.

$A \Leftarrow B \wedge C$ n'est pas vérifiée sur la première ligne. $A \Rightarrow B \vee C$ n'est pas vérifiée sur la deuxième ligne.

3.7 Analogies sur les multi-ensembles

Soit $(\mathcal{E}, \star)$ un groupe. Alors, $(\mathcal{E}^n, \star)$ est un groupe.

L'analogie peut alors être définie sur $(\mathcal{E}, \star)$ et sur $(\mathcal{E}^n, \star)$.

Chapitre 4

Discussion

Un travail similaire à celui présenté ici a déjà été réalisé dans la thèse de Nicolas Stroppa [Stroppa(2005)] au chapitre 4, paragraphe 4.2, de la page 91 à la page 104. La différence fondamentale d'avec le travail que nous présentons ici est que le travail précédemment cité part de la notion de factorisation pour l'appliquer aux structures algébriques et y faire « marcher » l'analogie.

Nous faisons différemment. Nous partons des axiomes de l'analogie et examinons si ces axiomes peuvent coller aux structures algébriques étudiées même pauvres.

En particulier, nous avons mis en évidence que ce qui manque à la structure algébrique pauvre de magma pour que l'analogie y existe, c'est la commutativité de l'opération. Et, par opposition, nous avons montré que la commutativité de la loi interne permet d'induire les axiomes de l'analogie à partir de la structure de groupe.

Bibliographie

[Stroppa(2005)] Nicolas Stroppa : *Définitions et caractérisation de modèles à base d'analogies pour l'apprentissage automatique des langues naturelles*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure des télécommunications, novembre 2005. URL `https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00145147/`.