Cahier d'analogie:
1. Formes équivalentes

Yves Lepage

Version 1, septembre 2020

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ces notes reprennent les éléments enseignés dans nos cours sur l'analogie donnés en maîtrise depuis bientôt dix ans à l'école information, production et systèmes de l'université Waseda. Les cours étaient donnés à partir de transparents. Il en manquait une version mise au propre en français. Le présent cahier, et ceux qui devraient suivre, sont destinés à remplir ce manque.

Les axiomes que nous présentons sont plus lâches que ceux présentés habituellement. En particulier, alors que l'égalité est d'habitude placée au cœur de l'analogie, nous utilisons une autre notion, la conformité, dont les propriétés seront déterminées par les axiomes de l'analogie.

Les faits principaux à retenir sont les suivants. Les huit formes équivalentes de l'analogie, dégagées dans des travaux précédents [Lepage (1998)], découlent de deux axiomes naturels de l'analogie. Ces huit formes équivalentes forment en fait le groupe des transformations des coins du carré, bien connu en algèbre sous le nom de D_8.

Chapitre 2

Les axiomes de l'analogie et ses huit formes équivalentes

Pour la justification des axiomes présentés plus bas, nous renvoyons le lecteur à nos travaux précédents [Lepage (1998), Lepage (2014a)] et [Lepage (2014b)], mais en particulier à [Lepage (2003)].

2.1 Rappels des axiomes ou postulats

(O)	réflexivité de la *conformité*	$A : B :: A : B$		
(I)	symétrie de la *conformité*	$A : B :: C : D$	$\Rightarrow$	$C : D :: A : B$
(II)	inversion des *rapports*	$A : B :: C : D$	$\Rightarrow$	$B : A :: D : C$
(III)	inversion des *objets*	$A : B :: C : D$	$\Rightarrow$	$A^{-1} : B^{-1} :: C^{-1} : D^{-1}$
(IV)	distribution dans les *objets*	tout trait de A doit se retrouver soit dans B soit dans C soit dans les deux à la fois.		
(V)	échange des extrêmes	$A : B :: C : D$	$\Rightarrow$	$D : B :: C : A$
(VI)	échange des moyens	$A : B :: C : D$	$\Rightarrow$	$A : C :: B : D$

2.2 Synthèse

Répétons l'interprétation de ces axiomes.

Les axiomes (I) à (III) collent à la définition de l'analogie comme *conformité* (I) *de rapports* (II) *entre objets de même type* (III). Si l'on considère la symétrie comme une forme d'inversion, alors ces trois axiomes appliquent cette notion à chacun des constituants de cette définition.

Les axiomes (I) et (II) impliquent les deux *articulations constitutives* de l'analogie : la *conformité,* notée ::, et le *rapport,* noté :.

Les axiomes (III) et (IV) expriment les deux *notions constitutives* de l'analogie : la *contiguïté,* parce que le cas extrême de contiguïté pour un objet est sa contiguïté à son inverse, et la *similarité,* définie à partir des traits le caractérisant.

Enfin, les deux axiomes (V) et (VI) sont caractéristiques de l'analogie. En particulier, l'axiome (VI) a depuis longtemps été perçu comme tel. Ils impliquent deux paires de termes particuliers : les *moyens*, B et C, et les *extrêmes,* A et D.

2.3 Redondance de certains axiomes

Des axiomes donnés en 2.2, quatre sont des transformations de l'ordre des termes de l'analogie : (I), (II), (V) et (VI). À partir de la forme primitive de l'analogie $A : B :: C : D$, on peut tirer huit formes équivalentes de l'analogie au moyen de ces quatre axiomes. Ces huit formes équivalentes sont données dans le tableau suivant.

Forme équivalente	Nom de la transformation	Abréviation
$A : B :: C : D$	Identité	id.
$A : C :: B : D$	Échange des moyens	éch. moy.
$B : A :: D : C$	Inversion des rapports	inv. :
$B : D :: A : C$	Rotation à gauche	rot. gau.
$C : A :: D : B$	Rotation à droite	rot. dr.
$C : D :: A : B$	Symétrie de la conformité	sym. ::
$D : B :: C : A$	Échange des extrêmes	éch. extr.
$D : C :: B : A$	Lecture en sens inverse	inv. lect.

Nous avons donné dans [Lepage (2003), p. 118] et ailleurs une visualisation de ces huit formes équivalentes sous forme d'un cube.

Le tableau ci-dessus indique sur chaque ligne le nom de la transformation à partir de la forme primitive. Quatre lignes, à savoir la deuxième, la troisième, la sixième et la septième, correspondent aux transformations mentionnées plus haut. On peut donc se demander comment appeler les transformations correspondant aux quatre autres lignes. La première ligne est l'analogie dans sa forme primitive ; la transformation correspondante est donc l'*identité*. La dernière ligne est tout simplement la *lecture en sens inverse* de la forme primitive de l'analogie ; on lui donnera donc ce nom. Les quatrième et cinquième lignes n'ont pas de nom dans la littérature classique sur l'analogie ; pour des raisons qui deviendront claires dans le paragraphe 4, nous les baptisons *rotation à gauche* et *rotation à droite.*

Certaines suite de compositions de transformations sont remarquables. On en donne quelques unes ci-dessous. Elles mettent en évidence un rôle interchangeable pour la symétrie de la conformité et l'inversion des rapports, d'une part, et pour l'échange des moyens et l'échange des extrêmes, d'autre part. Cela n'épuise pas le sujet et l'on peut donc se demander s'il est possible de retrouver toutes les huit formes équivalentes de l'analogie à partir de quelques transformations seulement.

Première suite	⇔ Seconde suite	Résultat
éch. moy. ∘ inv. :	⇔ éch. extr. ∘ sym. ::	$C : A :: D : B$
inv. : ∘ éch. moy.	⇔ sym. :: ∘ éch. extr.	$B : D :: A : C$
éch. moy. ∘ sym. :: ∘ éch. moy.	⇔ inv. :	$B : A :: D : C$
éch. extr. ∘ sym. :: ∘ éch. extr.	⇔ inv. :	$B : A :: D : C$
éch. moy. ∘ inv. : ∘ éch. moy.	⇔ sym. ::	$C : D :: A : B$
éch. extr. ∘ inv. : ∘ éch. extr.	⇔ sym. ::	$C : D :: A : B$

Si l'on se cantonne aux quatre transformations présentes dans les axiomes donnés en 2.2, on peut déjà observer qu'une seule transformation ne permet pas de reconstruire les huit formes équivalentes de l'analogie.

Pour ce qui est de suite de deux transformations, toujours limitées aux quatre transformations trouvées dans les axiomes, quatre paires de transformations permettent de reconstruire les huit formes équivalentes de l'analogie. Les autres paires d'axiomes ne le permettent pas. La preuve détaillée de ces reconstructions est donnée pour ces quatre paires de transformations dans les paragraphes 2.3.1 à 2.3.4. Du point de vue de la reconstruction des huit formes équivalentes de l'analogie, on peut donc dire que ces quatre paires sont équivalentes. Cela permet d'écrire la suite d'équivalences suivante.

$$
\begin{array}{ll}
& \left\{ \begin{array}{lcll} A : B :: C : D & \Rightarrow & C : D :: A : B & (\textsc{i}) \text{ sym. ::} \\ A : B :: C : D & \Rightarrow & D : B :: C : A & (\textsc{v}) \text{ éch. extr.} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcll} A : B :: C : D & \Rightarrow & C : D :: A : B & (\textsc{i}) \text{ sym. ::} \\ A : B :: C : D & \Rightarrow & A : C :: B : D & (\textsc{vi}) \text{ éch. moy.} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcll} A : B :: C : D & \Rightarrow & B : A :: D : C & (\textsc{ii}) \text{ inv. :} \\ A : B :: C : D & \Rightarrow & D : B :: C : A & (\textsc{v}) \text{ éch. extr.} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcll} A : B :: C : D & \Rightarrow & B : A :: D : C & (\textsc{ii}) \text{ inv. :} \\ A : B :: C : D & \Rightarrow & A : C :: B : D & (\textsc{vi}) \text{ éch. moy.} \end{array} \right.
\end{array}
$$

La preuve des équivalences entre paires de transformations se fait en bouclant.
(i) ∧ (v) ⇒ (ii) ∧ (v) ⇒ (i) ∧ (vi) ⇒ (ii) ∧ (vi) ⇒ (i) ∧ (v).

(i) ∧ (v) ⇒ (i) ∧ (vi) est montré par la ligne 2 du tableau du paragraphe 2.3.1 :
éch. moyens = sym. :: ∘ éch. extr ∘ sym. ::.

(i) ∧ (vi) ⇒ (ii) ∧ (v) est montré par les lignes 3 et 7 du tableau du paragraphe 2.3.2 :

inv. : $=$ éch. moy. $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. moy.
éch. extr. $=$ sym. :: $\circ$ éch. moy. $\circ$ sym. ::

(ii) $\wedge$ (v) $\Rightarrow$ (ii) $\wedge$ (vi) est montré par la ligne 5 du tableau du paragraphe 2.3.3 :
sym :: $=$ éch. moy. $\circ$ inv : $\circ$ éch. moy.

(ii) $\wedge$ (vi) $\Rightarrow$ (i) $\wedge$ (v) est montré par les lignes 0 et 0 du tableau du paragraphe 2.3.4 :
sym :: $=$ éch. moy. $\circ$ inv : $\circ$ éch. moy.
éch. extr. $=$ inv : $\circ$ éch. moy. $\circ$ éch. moy.

2.3.1 Huit formes équivalentes à l'aide de la symétrie de la conformité (I) et de l'échange des extrêmes (V)

Le tableau suivant montre comment les deux axiomes (I) et (V) permettent à eux seuls de retrouver les huit formes équivalentes de l'analogie. (I) et (V) sont respectivement la symétrie de la conformité, notée sym. :: en abrégé, et l'échange des extrêmes noté éch. extr. en abrégé.

Forme équivalente	Transformations	Nom
$A : B :: C : D$	sym :: $\circ$ sym :: $=$ éch. extr. $\circ$ éch. extr.	Identité
$A : C :: B : D$	sym. :: $\circ$ éch. extr $\circ$ sym. ::	Échange des moyens
$B : A :: D : C$	éch. extr $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. extr.	Inversion des rapports
$B : D :: A : C$	sym. :: $\circ$ éch. extr	Rotation à gauche
$C : A :: D : B$	éch. extr $\circ$ sym. ::	Rotation à droite
$C : D :: A : B$	sym. ::	Symétrie de la conformité
$D : B :: C : A$	éch. extr.	Échange des extrêmes
$D : C :: B : A$	éch. extr $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. extr. $\circ$ sym. :: $=$ sym. :: $\circ$ éch. extr $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. extr	Lecture en sens inverse

2.3.2 Huit formes équivalentes à l'aide de la symétrie de la conformité (I) et de l'échange des moyens (VI)

Le tableau suivant montre comment les deux axiomes (I) de symétrie de la conformité, notée sym. :: en abrégé, et (VI) d''échange des moyens noté éch. moy. en abrégé, permettent à eux seuls de retrouver les huit formes équivalentes de l'analogie.

Forme équivalente	Transformations	Nom
$A : B :: C : D$	sym :: $\circ$ sym :: $=$ éch. moy. $\circ$ éch. moy.	Identité
$A : C :: B : D$	éch. moy.	Échange des moyens
$B : A :: D : C$	éch. moy. $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. moy.	Inversion des rapports
$B : D :: A : C$	éch. moy. $\circ$ sym. ::	Rotation à gauche
$C : A :: D : B$	sym. :: $\circ$ éch. moy.	Rotation à droite
$C : D :: A : B$	sym. ::	Symétrie de la conformité
$D : B :: C : A$	sym. :: $\circ$ éch. moy. $\circ$ sym. ::	Échange des extrêmes
$D : C :: B : A$	éch. moy. $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. moy. $\circ$ sym. :: $=$ sym. :: $\circ$ éch. moy. $\circ$ sym. :: $\circ$ éch. moy.	Lecture en sens inverse

2.3.3 Huit formes équivalentes à l'aide de l'inversion des rapports (II) et de l'échange des extrêmes (V)

Le tableau suivant montre comment les deux axiomes (II) d'inversion des rapports, notée inv. : en abrégé, et (V) d'échange des extrêmes noté éch. extr. en abrégé, permettent à eux seuls de retrouver les huit formes équivalentes de l'analogie.

Forme équivalente	Transformations	Nom
$A : B :: C : D$	inv. : $\circ$ inv. : $=$ éch. extr. $\circ$ éch. extr.	Identité
$A : C :: B : D$	inv. : $\circ$ éch. extr. $\circ$ inv. :	Échange des moyens
$B : A :: D : C$	inv. :	Inversion des rapports
$B : D :: A : C$	éch. extr. $\circ$ inv. :	Rotation à gauche
$C : A :: D : B$	inv : $\circ$ éch. extr.	Rotation à droite
$C : D :: A : B$	éch. extr. $\circ$ inv. : $\circ$ éch. extr.	Symétrie de la conformité
$D : B :: C : A$	éch. extr.	Échange des extrêmes
$D : C :: B : A$	éch. extr. $\circ$ inv. : $\circ$ éch. extr. $\circ$ inv. : $=$ inv. : $\circ$ éch. extr. $\circ$ inv. : $\circ$ éch. extr.	Lecture en sens inverse

2.3.4 Huit formes équivalentes à l'aide de l'inversion des rapports (II) et de l'échange des moyens (VI)

Le tableau suivant montre comment les deux axiomes (II) d'inversion des rapports, notée inv. : en abrégé, et (V) d'échange des moyens, noté éch. moy. en abrégé, permettent à eux seuls de retrouver les huit formes équivalentes de l'analogie.

Forme équivalente	Transformations	Nom
$A : B :: C : D$	inv. : $\circ$ inv. : $=$ éch. moy. $\circ$ éch. moy.	Identité
$A : C :: B : D$	éch. moy.	Échange des moyens
$B : A :: D : C$	inv. :	Inversion des rapports
$B : D :: A : C$	inv : $\circ$ exch moyens	Rotation à gauche
$C : A :: D : B$	éch. moy.. $\circ$ inv :	Rotation à droite
$C : D :: A : B$	éch. moy. $\circ$ inv : $\circ$ éch. moy.	Symétrie de la conformité
$D : B :: C : A$	inv : $\circ$ exch moyens $\circ$ inv :	Échange des extrêmes
$D : C :: B : A$	éch. moy. $\circ$ inv : $\circ$ éch. moy. $\circ$ inv : $=$ inv : $\circ$ éch. moy. $\circ$ inv : $\circ$ éch. moy.	Lecture en sens inverse

Chapitre 3

L'octahèdre des transformations de l'analogie

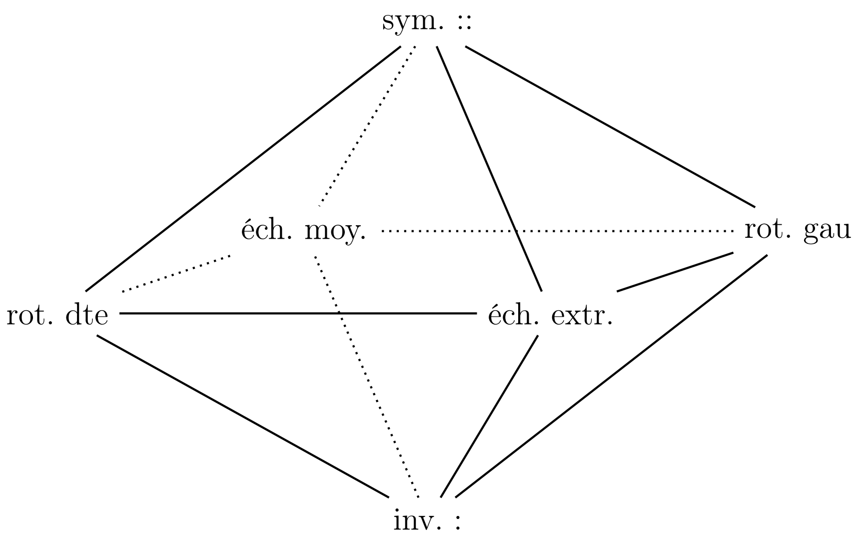
On vient de voir quatre systèmes formés de deux transformations correspondant à des axiomes. Par généralisation, on peut légitimement se demander s'il en existe d'autres. La question est donc : quels sont tous les systèmes de transformations qui permettent de retrouver toutes les formes équivalentes de l'analogie, sans se restreindre nécessairement aux transformations des axiomes ?

L'ensemble des transformations possibles est l'ensemble des huit formes équivalentes de l'analogie, et seulement ces transformations. En effet, toute transformation autre qu'une transformation permettant d'obtenir une forme autre qu'une forme équivalente de l'analogie est invalide, puisque, dans le cas général, on ne sait rien de la valeur de vérité d'une telle forme. Une vérification automatique permet d'énumérer les 12 systèmes suivants pour deux transformations.

{symétrie de la conformité,	échange des moyens }
{symétrie de la conformité,	échange des extrêmes}
{symétrie de la conformité,	rotation à gauche }
{symétrie de la conformité,	rotation à droite }
{inversion des rapports,	échange des moyens }
{inversion des rapports,	échange des extrêmes}
{inversion des rapports,	rotation à gauche }
{inversion des rapports,	rotation à droite }
{échange des moyens,	rotation à gauche }
{échange des moyens,	rotation à droite }

{échange des extrêmes, rotation à gauche}
{échange des extrêmes, rotation à droite }

On retrouve bien les quatre systèmes de paires de transformations mentionnées plus haut, aux lignes 1, 2, 5 et 6, mais on y trouve aussi huit paires nouvelles. L'énumération donnée ci-dessus structure toutes ces paires en isolant d'abord la symétrie de la conformité et l'inversion des rapports, en face des quatre autres transformations ; puis les deux échanges, des moyens et des extrêmes, en face des deux rotations. Ces douze paires de transformations sont représentées dans le dessin suivant par les arêtes d'un octahèdre que nous appellerons donc *octahèdre des transformations de l'analogie.*



Au-delà, tout système contenant l'une des paires de transformations permettra nécessairement de reconstruire les huit formes équivalentes. On peut prouver par programme que seuls les ensembles contenant l'une des douze paires de transformations de l'octahèdre permettent de reconstruire les huit formes équivalentes de l'analogie ; les autres ne le permettent pas. Il y a donc équivalence logique entre la capacité de reconstruire les huit formes équivalentes de l'analogie et l'inclusion de l'une des paires de transformations de l'octahèdre.

Chapitre 4

Les transformations des coins du carré

Changeons de notation et écrivons l'analogie $A : B :: C : D$ sous la forme $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ c'est-à-dire, comme un carré avec A et B comme coins supérieurs et C et D sur les coins inférieurs.

Les huit formes équivalentes de l'analogie, considérées comme transformations sont alors vues comme des transformations des coins du carré. Par exemple, $A : C :: B : D$ c'est-à-dire la transformation de $A : B :: C : D$ en $A : C :: B : D$ est la transformation de $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ en $\begin{matrix} A & C \\ B & D \end{matrix}$, que l'on notera simplement $\begin{matrix} A & C \\ B & D \end{matrix}$. C'est la symétrie par rapport à la première diagonale.

Le tableau ci-dessous donne la correspondance entre chacune des huit formes de l'analogie et la transformation des coins du carré correspondante.

Analogie		Coins du carré		
Transformation	Forme équivalente	Transformation		D_8
identité	$A : B :: C : D$	identité	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	e
rotation à gauche	$B : D :: A : C$	rotation de $\pi/2$	$\begin{matrix} B & D \\ A & C \end{matrix}$	a
lecture en sens inverse	$D : C :: B : A$	rotation de π	$\begin{matrix} D & C \\ B & A \end{matrix}$	a^2
rotation à droite	$C : A :: D : B$	rotation de $3\pi/2 = -\pi/2$	$\begin{matrix} C & A \\ D & B \end{matrix}$	a^3
échange des moyens	$A : C :: B : D$	symétrie par rapport à la première diagonale	$\begin{matrix} A & C \\ B & D \end{matrix}$	x
inversion des rapports	$B : A :: D : C$	symétrie par rapport à l'axe vertical	$\begin{matrix} B & A \\ D & C \end{matrix}$	ax
échange des extrêmes	$D : B :: C : A$	symétrie par rapport à la seconde diagonale	$\begin{matrix} D & B \\ C & A \end{matrix}$	a^2x
symétrie de la conformité	$C : D :: A : B$	symétrie par rapport à l'axe horizontal	$\begin{matrix} C & D \\ A & B \end{matrix}$	a^3x

Ce tableau montre que les huit transformations correspondant aux huit formes équivalentes de l'analogie sont les transformations du coin du carré correspondant aux symétries et aux rotations.

Les noms que nous avons donnés plus haut aux deux transformations sans nom dans les descriptions classiques de l'analogie, à savoir les noms de rotation à gauche et rotation à droite, s'expliquent maintenant par la correspondance avec les transformations des coins du carré : il s'agit des rotations de $\pi/2$ et $-\pi/2$ respectivement.

L'ensemble des huit formes équivalentes de l'analogie, considérées comme transformations, et équipé de la composition de transformations $\circ$, est un *groupe*.

L'élément neutre est l'identité $\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$ La composition est associative. Chaque élément a un élément opposé.

Il faut faire attention à ce que la composition n'est pas commutative. Par exemple, éch. moy. $\circ$ sym. :: $\neq$ sym. :: $\circ$ éch. moy. Le groupe n'est donc pas un groupe commutatif.

Les six transformations de base : identité, symétrie de la conformité, inversion des rapports, échange des moyens, échange des extrêmes et lecture en sens inverse, sont leur propre élément opposé. Leur ordre est donc de 2, ce qui implique que l'ordre du groupe est 2.

Les deux autres transformations sans nom dans les descriptions classiques de l'analogie $\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$ et $\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$ sont l'élément opposé l'un de l'autre. En appliquant quatre fois une rotation, on retombe sur la configuration de base. Les rotations sont donc d'ordre 4.

$\begin{matrix}. & .\\ . & .\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$
$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$
$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$
$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$
$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$
$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$
$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$
$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$
$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & C\\ B & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}D & B\\ C & A\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & D\\ A & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}C & A\\ D & B\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & D\\ A & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}B & A\\ D & C\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & C\\ B & D\end{matrix}$	$\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix}$

Même tableau qu'à la page précédente, mais avec lignes et colonnes réarrangées.

$.\ .$ $.\ .$	$A\ B$ $C\ D$	$B\ D$ $A\ C$	$D\ C$ $B\ A$	$C\ A$ $D\ B$	$A\ C$ $B\ D$	$B\ A$ $D\ C$	$D\ B$ $C\ A$	$C\ D$ $A\ B$
$A\ B$ $C\ D$	$A\ B$ $C\ D$	$B\ D$ $A\ C$	$D\ C$ $B\ A$	$C\ A$ $D\ B$	$A\ C$ $B\ D$	$B\ A$ $D\ C$	$D\ B$ $C\ A$	$C\ D$ $A\ B$
$B\ D$ $A\ C$	$B\ D$ $A\ C$	$D\ C$ $B\ A$	$C\ A$ $D\ B$	$A\ B$ $C\ D$	$B\ A$ $D\ C$	$D\ B$ $C\ A$	$C\ D$ $A\ B$	$A\ C$ $B\ D$
$D\ C$ $B\ A$	$D\ C$ $B\ A$	$C\ A$ $D\ B$	$A\ B$ $C\ D$	$B\ D$ $A\ C$	$D\ B$ $C\ A$	$C\ D$ $A\ B$	$A\ C$ $B\ D$	$B\ A$ $D\ C$
$C\ A$ $D\ B$	$C\ A$ $D\ B$	$A\ B$ $C\ D$	$B\ D$ $A\ C$	$D\ C$ $B\ A$	$C\ D$ $A\ B$	$A\ C$ $B\ D$	$B\ A$ $D\ C$	$D\ B$ $C\ A$
$A\ C$ $B\ D$	$A\ C$ $B\ D$	$C\ D$ $A\ B$	$D\ B$ $C\ A$	$B\ A$ $D\ C$	$A\ B$ $C\ D$	$C\ A$ $D\ B$	$D\ C$ $B\ A$	$B\ D$ $A\ C$
$B\ A$ $D\ C$	$B\ A$ $D\ C$	$A\ C$ $B\ D$	$C\ D$ $A\ B$	$D\ B$ $C\ A$	$B\ D$ $A\ C$	$A\ B$ $C\ D$	$C\ A$ $D\ B$	$D\ C$ $B\ A$
$D\ B$ $C\ A$	$D\ B$ $C\ A$	$B\ A$ $D\ C$	$A\ C$ $B\ D$	$C\ D$ $A\ B$	$D\ C$ $B\ A$	$B\ D$ $A\ C$	$A\ B$ $C\ D$	$C\ A$ $D\ B$
$C\ D$ $A\ B$	$C\ D$ $A\ B$	$D\ B$ $C\ A$	$B\ A$ $D\ C$	$A\ C$ $B\ D$	$C\ A$ $D\ B$	$D\ C$ $B\ A$	$B\ D$ $A\ C$	$A\ B$ $C\ D$

Le tableau précédent avec ses lignes et colonnes réarrangées est égal, au nom des objets près, au tableau du groupe des transformations des coins du carré. Ce groupe se note D_8 et s'appelle le groupe diédral.

D_8	e	a	a^2	a^3	x	ax	a^2x	a^3x
e	e	a	a^2	a^3	x	a^x	a^2x	a^3x
a	a	a^2	a^3	e	ax	a^2x	a^3x	x
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2x	a^3x	x	ax
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3x	x	ax	a^2x
x	x	a^3x	a^2x	ax	e	a^3	a^2	a
ax	ax	x	a^3x	a^2x	a	e	a^3	a^2
a^2x	a^2x	ax	x	a^3x	a^2	a	e	a^3
a^3x	a^3x	a^2x	ax	x	a^3	a^2	a	e

On peut voir les huit différentes écritures d'une même analogie comme le fait de lire la même analogie sous forme de carré $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ selon une combinaison des trois ordres suivants :

— en ligne, ou bien en colonne :
$A\ B$ puis $C\ D$, ou bien $A\ C$ puis $B\ D$;

— de gauche à droite, ou bien de droite à gauche :
$A\ B$ puis $C\ D$, ou bien $B\ A$ puis $D\ C$;

— de bas en haut, ou bien de haut en bas :
$A\ B$ puis $C\ D$, ou bien $C\ D$ puis $A\ B$.

Chaque ordre offrant deux possibilités, cela fait en tout $2^3 = 8$ possibilités de lecture, qui correspondent chacune à l'une des huit formes de l'analogie.

Chapitre 5

Discussion

Il faut retenir essentiellement que les huit formes équivalentes de l'analogie sont le groupe des transformations des coins du carré.

Ce premier cahier était centré sur les axiomes ayant trait aux **articulations constitutives** de l'analogie : le rapport et la conformité.

On aura noté notre insistance à mentionner deux autres axiomes que les auteurs ne considèrent pas d'habitude, celui de l'inversion des objets et celui de la distribution dans les objets. Ils découlent d'une étude de la notion d'analogie ayant dégagé les deux **notions constitutives** de l'analogie, la similarité et la contiguïté [Lepage (2003)]. Le lien avec la nature des objets sera fait partiellement dans le second cahier.

Bibliographie

[Lepage (1998)] Yves Lepage : Solving analogies on words : an algorithm. *In Proceedings of the 36th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL'98) and the 17th International Conference on Computational Linguistics (COLING'98)*, volume I, pages 728–735, Montreal, août 1998. Association for Computational Linguistics. URL https://www.aclweb.org/anthology/P98-1120/.

[Lepage (2003)] Yves Lepage : *De l'analogie rendant compte de la commutation en linguistique*. Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université de Grenoble, mai 2003.

[Lepage (2014a)] Yves Lepage : Analogy between binary images : application to Chinese characters. *In* Henri Prade et Gilles Richard, rédacteurs en chef : *Computational Approaches to Analogical Reasoning : Current Trends*, Studies in Computational Intelligence 548, pages 25–57. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2014a. ISBN 978-3-642-54516-0.

[Lepage (2014b)] Yves Lepage : Proportional analogy in written language data. *In* Núria Gala, Rainer Rapp et Gemma Bel-Enguix, rédacteurs en chef : *Language, Production, Cognition and the Lexicon*, volume 48 de *Text, Speech and Language Technology*, pages 151–173. Springer International Publishing Switzerland, 11 2014b. ISBN 978-3-319-08042-0-2. URL https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-08043-7_10.