Cahier d'analogie:
6. Analogie numérique
Cas des réels positifs

Yves Lepage et Miguel Couceiro

Version 1, 2023

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Définition **7**

2.1 Définition de l'analogie en puissance p 7
2.2 Réflexivité de la conformité 8
2.3 Symétrie de la conformité 8
2.4 Huit formes équivalentes de l'analogie 8
2.5 Transitivité 10
2.5.1 Cas général 10
2.5.2 Cas où p tend vers zéro 11
2.5.3 Cas où p tend vers plus ou moins l'infini 12

3 Equivalences et réductions **13**

3.1 Puissance opposée 13
3.2 Réduction nombre positif 14
3.2.1 Cas général multiplication 14
3.2.2 Cas particulier division 15
3.3 Réduction à l'analogie arithmétique 16
3.3.1 Cas général 16
3.3.2 Cas en 0 17
3.3.3 Cas de $-\infty$ et $+\infty$ 17
3.4 Réduction à une forme canonique 18

4 Existence et unicité **19**

4.1 Définition de δ 20
4.2 Étude de δ 20
4.3 Valeurs extrêmes de δ 20
4.4 Existence de p pour un quadruplet quelconque 20
4.5 Croissance de δ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ 21
4.6 Unicité de p pour un quadruplet quelconque 22
4.6.1 Résultat préliminiare 22

4.6.2 Deux puissances positives 22
4.6.3 Deux puissances négatives 22
4.6.4 Cas $p = 0$ 23
4.6.5 Visualisation 23
4.6.6 Calcul de p en pratique 23

5 Remarques 25
5.1 Résolution d'analogie 25
5.2 Condition à l'existence de p 26
5.3 Réordonnancement de quatre termes quelconques 27
5.4 Cas d'égalité 28
5.5 Cas particulier des booléïens 29

6 Discussion 31
6.1 Moyenne généralisée et barycentre 31
6.2 Approximation par sigmoïde 31
6.3 Suites d'entiers 32

7 Conclusion et perspectives 33

Chapitre 1

Introduction

Ces notes étudient le rapport entre analogie et moyennes, ou, plus exactement, comme le titre l'indique, moyennes généralisées.

L'analogie étudiée primitivement par Euclide, ou plutôt sans doute Eudoxe, aurait été l'analogie continue, pas l'analogie discrète. Selon certains chercheurs (cf. [Vitrac (1996)]), le mot ἀναλογία (« encore le (même) rapport ») aurait sans doute était réservé d'abord aux analogies de type continu, c'est-à-dire $A : B :: B : D$. Pour bien faire la différence, l'analogie discrète aurait même été appelée ἀνακολουθία sous le calame d'un certain Speusippe [Michel (1949)]. Elle aurait pris le nom d'analogie seulement ensuite.

Dans l'*Éthique à Nicomaque*, Aristote précise ce fait, qu'il existe deux types d'analogies appelées chacune respectivement discrète et continue, la première impliquant quatre termes, la seconde trois termes, dont l'un est répété.

> ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων, καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις. **ἡ** μὲν οὖν **διῃρημένη** ὅτι **ἐν τέτταρσιν,** δῆλον. ἀλλὰ καὶ **ἡ συνεχής** [...] **δὶς** οὖν ἡ τοῦ **β** εἴρηται ([Aristote (1997)], 1131 a29)

Pour une analogie continue, si le rapport est la division [1], on a :

$$A \div B = B \div D \quad \Leftrightarrow \quad B^2 = A \times D \quad \Leftrightarrow \quad B = \sqrt{A \times D}.$$

On sait que cette formule pour B est celle de la moyenne géométrique de A et D.

1. Le rapport appelé raison jusqu'à récemment (lat. *rationem* > fr. raison) désigne bien la division. Voir la traduction du XVII[e] siècle des Élements d'Euclide due à Henrion [Euclide (1632)]. Par parenthèse, *ratio* est un anglicisme totalement inutile et donc ridicule.

Si le rapport est la soustraction, on a alors, toujours pour une analogie continue :

$$A - B = B - D \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times B = A + D \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{1}{2}(A + D)$$

On voit que B est la moyenne arithmétique de A et D.

C'est le lieu ici de citer le travail des Pythagoriciens et des mathématiciens du Moyen-Âge sur les médiétés (gr. $\mu\varepsilon\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$, lat. medietas ou mediocritas) (cf. [Michel (1949)]). Avec la division comme rapport, on a le tableau suivant jouant sur les trois analogies classiques, arithmétique, géométrique et harmonique. Dans ce tableau, il faut remarquer que les trois premiers membres de l'analogie sur chaque ligne sont les mêmes. Seul le quatrième terme varie et prend successivement les valeurs a, b et c.

	b est moyenne	
$a - b : b - c = a : a$	arithmétique	$a - b : b - c = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2}$
$a - b : b - c = a : b$	géométrique	$ab - b^2 : ab - ac = ab : ab \Leftrightarrow b^2 = ac$
$a - b : b - c = a : c$	harmonique	$ca - cb : ab - ac = ac : ac \Leftrightarrow b = \dfrac{2ac}{a+c}$
		$b = \dfrac{2ac}{a+c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c})$

À titre de curiosité, mentionnons le fait que la proportion musicale, peut-être déjà connue à Babylone et peut-être transmise aux Grecs par Pythagore après son séjour en Égypte, est une analogie digne d'être remarquée. C'est l'analogie géometrique entre deux termes extrêmes et leurs moyennes arithmétique et harmonique prises comme termes moyens.

$$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2a}{a+b} = \frac{2a \times b}{(a+b) \times b}$$

La notion de moyenne, qu'elle soit arithmétique, géométrique ou harmonique, a été généralisée par Hölder dans un article de 1882 [Hölder (1882)]. Pour plus de détail, le lecteur intéressé est renvoyé au cahier préliminaire à celui-ci, le cahier $6 - \epsilon$.

Chapitre 2

Définition de l'analogie numérique par les moyennes généralisées

2.1 Définition de l'analogie en puissance p

On rappelle que la *moyenne généralisée* de deux nombres est le nombre suivant :

$$m_p(a,d) = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)}$$

Pour deux nombres réels positifs, il existe une infinité de moyennes. Chacune des moyennes correspond à un p donné..

Sur les nombres réels positifs, on définit *l'analogie pour la puissance* p de la façon qui suit :

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d \quad & \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \quad m_p(a,d) = m_p(b,c) \\ & \Leftrightarrow \quad \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \end{aligned}$$

Soient donc quatre nombre réels positifs a, b, c et d, on dira qu'il y a une analogie entre ces nombres si et seulement il existe un p tel que la moyenne puissance p des extrêmes a et d soit égale à la moyenne puissance p des moyens b et c. La question est de savoir premièrement à quelle condition on peut trouver un p tel que l'analogie tienne, et deuxièmement de déterminer ce p.

Mais il faut d'abord vérifier que la définition donnée ci-dessus correspond bien aux idées que l'on se fait ordinairement de l'analogie mathématique. Il faut examiner si l'on a la réflexivité et la symétrie pour $::^p$ et si les huit formes équivalentes de l'analogie existent bien ici.

2.2 Réflexivité de la conformité

Il est trivial de constater que, pour deux nombres positifs quelconques a et b, pour tout p, on a toujours

$$a : b ::^p a : b \tag{2.1}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + b^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + a^r)}. \tag{2.2}$$

Il faut noter que, dans la formule avec les limites, si le premier a de (2.2) à gauche du signe égal correspond au premier a de (2.1) à gauche de la conformité en p, en revanche, le premier b de (2.2) à gauche du signe égal correspond au dernier b dans (2.1) à droite de la conformité en p.

2.3 Symétrie de la conformité

La symétrie de la conformité s'énonce comme suit.

$$a : b ::^p c : d \Leftrightarrow c : d ::^p a : b$$

Elle est vérifiée car :

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d &\Leftrightarrow m_p(a, d) = m_p(b, c) \\ &\Leftrightarrow m_p(b, c) = m_p(a, d) \\ &\Leftrightarrow m_p(c, b) = m_p(d, a) \\ &\Leftrightarrow c : d ::^p a : b \end{aligned}$$

La commutativité de l'addition dans $(a^p + d^p)$, permet de conclure que le même p peut être utilisé pour les quatre quadruplets où l'on échange a et d, c'est-à-dire l'échange des extrêmes et où l'on échange b et c, c'est-à-dire l'échange des moyens.

En résumé, on a l'échange des moyens et l'échange des extrêmes.

2.4 Huit formes équivalentes de l'analogie

Le fait que la symétrie de la conformité et l'échange des moyens entraînent les huit formes équivalentes de l'analogie a été montré dans les cahiers précédents. De ce qui précède on conclut que, si l'on a une analogie en p entre quatre nombre réels non-nuls positifs, alors on a bien les huit formes équivalentes pour cette analogie .

$$\begin{array}{ll} a : b :: c : d & c : a :: d : b \\ a : c :: b : d & c : d :: a : b \\ b : a :: d : c & d : b :: c : a \\ b : d :: a : c & d : c :: b : a \end{array}$$

Rappelons que l'article Proportion de l'Encyclopédie [Rallier des Ourmes (1751–1772)] mentionne les deux plus connues : *invertendo*, l'inversion des rapports $b : a :: d : c$ et *permutando*, la permutation des moyens $a : c :: b : d$, jugée intrinsèquement caractéristique de l'analogie par les Anciens (cf. [Aristote (1997)]). L'équivalence entre la forme originale $a : b :: c : d$ et ces deux formes implique les cinq autres.

Rappelons que les huit formes équivalentes de l'analogie établissent une correspondance avec le groupe des transformations des coins du carré, c'est-à-dire le groupe diédral, noté D_8.

Pour ce qui est de l'analogie par moyenne généralisée, l'inversion des rapports est donnée par la symétrie de l'égalité dans $m_p(b, c) = m_p(a, d)$. La commutativité de l'addition dans $(b^p + c^p)$, de la multiplication dans $b \times c$ et dans $\min(b, c)$ ou $\max(b, c)$ donne la permutation des moyens.

2.5 Transitivité de l'analogie en puissance p

La transitivité n'est pas requise d'habitude pour l'analogie en général. Une simple relation de ressemblance et non d'équivalence suffit. De là notre insistance à dire conformité pour :: et non pas égalité ou identité. Dans le cas qui nous intéresse, il est possible de montrer que la transitivité est vérifiée.

La transitivité pour l'analogie est la transitivité de la conformité. Elle énonce que

$$\forall (a,b,c,d,e,f) \in (\mathbb{R}^{+*})^6, \quad \begin{cases} a : b :: c : d \\ c : d :: e : f \end{cases} \Rightarrow \quad a : b :: e : f$$

Nous montrons ci-dessous que l'analogie en puissance de p est transitive pout tout p, sauf plus ou moins l'infini, pour lesquels des conditions sont à remplir.

2.5.1 Cas général

Ici nous supposons que p est dans $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire différent de 0.

$$\begin{cases} m_p(a,d) = m_p(b,c) \\ m_p(c,f) = m_p(d,e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim\limits_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \\ \lim\limits_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(c^r + f^r)} = \lim\limits_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(d^r + e^r)} \end{cases}$$

(On peut éliminer le passage à la limite, la racine et le facteur un demi.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^p + d^p = b^p + c^p \\ c^p + f^p = d^p + e^p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^p - b^p = c^p - d^p \\ c^p - d^p = e^p - f^p \end{cases}$$

(Noter l'implication ci-dessous.)

$$\Rightarrow \quad a^p - b^p = e^p - f^p$$

$$\Leftrightarrow \quad a^p + f^p = d^p + e^p$$

(On peut réintroduire le facteur un demi et la racine.)

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}(e^p + f^p)}$$

(On peut réintroduire le passage à la limite.)

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(e^r + f^r)}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_p(a, d) = m_p(e, f)$$

Pour résumer :

$$\begin{cases} a : b ::^p c : d \\ c : d ::^p e : f \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a : b ::^p e : f$$

2.5.2 Cas où p tend vers zéro

Dans ce cas on sait que $\lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \sqrt{a \times d}$. On a donc facilement :

$$\begin{cases} m_0(a, d) = m_0(b, c) \\ m_0(c, f) = m_0(d, e) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \\ \lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(c^r + f^r)} = \lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(d^r + e^r)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a \times d} = \sqrt{b \times c} \\ \sqrt{c \times f} = \sqrt{d \times e} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a/b} = \sqrt{c/d} \\ \sqrt{c/d} = \sqrt{e/f} \end{cases}$$

(Noter l'implication ci-dessous.)

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a/d} = \sqrt{e/f}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a \times f} = \sqrt{d \times e}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \lim_{r\to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + f^r)} = \lim_{r\to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(d^r + e^r)} \\
&\Leftrightarrow \quad m_0(a, f) = m_0(d, e)
\end{aligned}$$

Pour résumer :

$$\begin{cases} a : b ::^0 c : d \\ c : d ::^0 e : f \end{cases} \Rightarrow \quad a : b ::^0 e : f$$

2.5.3 Cas où p tend vers plus ou moins l'infini

Dans ce cas on sait que $\lim_{r\to -\infty} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \min(a, d)$. Le début de démonstration pour $-\infty$ serait comme suit.

$$\begin{cases} m_{-\infty}(a, d) = m_{-\infty}(b, c) \\ m_{-\infty}(c, f) = m_{-\infty}(d, e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{r\to -\infty} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r\to -\infty} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \\ \lim_{r\to -\infty} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(c^r + f^r)} = \lim_{r\to -\infty} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(d^r + e^r)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min(a, d) = \min(b, c) \\ \min(c, f) = \min(d, e) \end{cases}$$

Malheureusement rien ne permet de conclure que $\min(a, f) = \min(d, e)$. Il suffit d'exhiber un contre-exemple pour conclure que la transitivité n'est pas vérifiée dans le cas de $p = -\infty$.

Un tel contre-exemple est donné par les valeurs $a = b = 1$, $c = d = 2$ et $e = f = 3$. Dans ce cas, $\min(a, d) = 1 = \min(b, c)$ et $\min(c, f) = 2 = \min(d, e)$ mais $\min(a, f) = 1 \neq 2 = \min(d, e)$.

La démonstration que la transitivité n'est pas vérifiée pour $+\infty$ est en tout point similaire.

Cependant, si l'on suppose que a, b, c, d sont rangés par ordre croissant et que e et f sont supérieurs ou égaux à d, alors on peut montrer la transitivité. Il en va de même pour plus l'infini pour lequel il faudrait simplement remplacer min par max et inverser le sens des inégalités.

La transitivité toute seule n'implique pas l'unicité de la solution pour une équation analogique. Il suffit d'avoir la

Chapitre 3

Equivalences et réductions

3.1 Equivalence avec l'analogie de puissance opposée

On remarque facilement que, pour une analogie en puissance p donnée, l'analogie en la puissance opposée est valable sur les inverses des termes.

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} : \frac{1}{b} ::^{-p} \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$$

Autrement dit, étant donnée une analogie en puissance p, l'analogie sur les inverses existe, mais en puissance $-p$.

3.2 Réduction par multiplication par un nombre positif

3.2.1 Cas général de la multiplication

Il est facile d'observer que, pour quatre nombre réels positifs quelconques, l'analogie en p entre ces nombres peut être transformée en une autre analogie de même puissance p, entre les mêmes nombres multipliés par un nombre positif quelconque.

C'est-à-dire, soient quatre nombre réels positifs tels que a, b, c et d, tels que $a \leq b \leq c \leq d$, et λ un nombre réel positif et non nul, alors on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{*+}, \quad a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \lambda a : \lambda b ::^p \lambda c : \lambda d.$$

Il est en effet facile de montrer que, d'abord dans le cas où p est différent de 0 :

$$\begin{aligned}
a : b ::^p c : d \quad & \Leftrightarrow \quad \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}(b^p + c^p)} \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda \times \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \lambda \times \sqrt[p]{\frac{1}{2}(b^p + c^p)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\lambda^p} \times \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \sqrt[p]{\lambda^p} \times \sqrt[p]{\frac{1}{2}(b^p + c^p)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\lambda^p \times \frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \sqrt[p]{\lambda^p \times \frac{1}{2}(b^p + c^p)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\frac{1}{2}(\lambda^p a^p + \lambda^p d^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}(\lambda^p b^p + (\lambda^p c^p)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\frac{1}{2}((\lambda a)^p + (\lambda d)^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}((\lambda b)^p + (\lambda c)^p)} \\
& \Leftrightarrow \quad \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}((\lambda a)^r + (\lambda d)^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}((\lambda b)^r + (\lambda c)^r)} \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda a : \lambda b ::^p \lambda c : \lambda d
\end{aligned}$$

Dans le cas où p est égal à 0, il est trivial que :

$$\begin{aligned}
a : b ::_0 c : d &\Leftrightarrow \sqrt{ad} = \sqrt{bc} \\
&\Leftrightarrow \lambda \times \sqrt{ad} = \lambda \times \sqrt{bc} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{ad} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{bc} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 ad} = \sqrt{\lambda^2 bc} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(\lambda a)(\lambda d)} = \sqrt{(\lambda b)(\lambda c)} \\
&\Leftrightarrow \lambda a : \lambda b ::_0 \lambda c : \lambda d
\end{aligned}$$

Dans le cas où p tend vers $-\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
a : b ::_{-\infty} c : d &\Leftrightarrow \min(a, d) = \min(b, c) \\
&\Leftrightarrow \min(\lambda a, \lambda d) = \min(\lambda b, \lambda c) \\
&\Leftrightarrow \lambda a : \lambda b ::_{-\infty} \lambda c : \lambda d
\end{aligned}$$

Et de même pour p tendant vers $+\infty$, en remplaçant min par max.

3.2.2 Cas particulier de la division par d

Puisque a, b, c et d sont des réels positifs, tout terme est positif, et son inverse aussi. On déduit donc de la propriété précédente que l'on peut multiplier par l'inverse de l'un des termes. Ce terme divisé par lui-même devient 1. Conséquemment, toute analogie en puissance p peut se réduire, en divisant tous les termes par l'un d'entre eux, à une analogie de même puissance où l'un des termes est 1.

Si les termes ont été triés par ordre croissant, le dernier est le plus grand. En divisant par ce terme, on obtient une analogie de même puissance où le dernier terme est 1, et où tous les autres termes sont inférieurs à 1.

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{d} : \frac{b}{d} ::^p \frac{c}{d} : 1$$

3.3 Réduction à l'analogie arithmétique

Toute analogie en puissance p, avec p différent de $-\infty$ ou $+\infty$, peut être transposée en analogie arithmétique, c'est-à-dire en puissance 1. Dans le cas général, en prenant la puissance p des termes d'une analogie, on obtient le résultat voulu. Dans le cas où $p = 0$, la transformation est la prise du logarithme.

La proposition suivante énonce le fait que toute analogie en puissance p peut être transposée en analogie arithmétique, c'est-à-dire en puissance 1.

$$\forall p \in \mathbb{R}^*, \quad \forall (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^{+*})^4, \quad a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad a^p : b^p ::^1 c^p : d^p \tag{3.1}$$

3.3.1 Cas général

Ce cas est trivial.

$$\begin{aligned}
a : b ::^p c : d \quad & \Leftrightarrow \quad \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[p]{\frac{1}{2}(a^p + d^p)} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}(b^p + c^p)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a^p + d^p) = \frac{1}{2}(b^p + c^p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \quad \sqrt[1]{\frac{1}{2}((a^p)^1 + (d^p)^1)} = \sqrt[1]{\frac{1}{2}((b^p)^1 + (c^p)^1)} \\
& \Leftrightarrow \quad \lim_{r \to 1} \sqrt[r]{\frac{1}{2}((a^p)^r + (d^p)^r)} = \lim_{r \to 1} \sqrt[r]{\frac{1}{2}((b^p)^r + (c^p)^r)} \\
& \Leftrightarrow \quad a^p : b^p ::^1 c^p : d^p
\end{aligned}$$

Une manière peut-être plus simple de faire, dans ce cas, est d'écrire simplement les équivalences suivantes, en ayant en tête que l'analogie en puissance 1 est l'analogie arithmétique où le rapport est la soustraction et la conformité l'égalité.

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d \quad &\Leftrightarrow \quad a^p - b^p = c^p - d^p \\ &\Leftrightarrow \quad a^p : b^p ::^1 c^p : d^p \end{aligned}$$

3.3.2 Cas en 0

Dans ce cas-ci, la transformation à appliquer pour passer de l'analogie géométrique à l'analogie arithmétique est la prise du logarithme.

$$\begin{aligned} a : b ::_0 c : d \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to 0} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a \times d} = \sqrt{b \times c} \\ &\Leftrightarrow \quad (a \times d)^{\frac{1}{2}} = (b \times c)^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln((a \times d)^{\frac{1}{2}}) = \ln((b \times c)^{\frac{1}{2}}) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\ln a + \ln d) = \frac{1}{2}(\ln b + \ln c) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[1]{\frac{1}{2}((\ln a)^1 + (\ln d)^1)} = \sqrt[1]{\frac{1}{2}((\ln b)^1 + (\ln c)^1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \lim_{r \to 1} \sqrt[r]{\frac{1}{2}((\ln a)^r + (\ln d)^r)} = \lim_{r \to 1} \sqrt[r]{\frac{1}{2}((\ln b)^r + (\ln c)^r)} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln a : \ln b ::^1 \ln c : \ln p \end{aligned}$$

3.3.3 Cas de $-\infty$ et $+\infty$

La propriété n'est pas valable dans ces cas. Il n'y a pas de transformation permettant de passer à une analogie arithmétique à partir de la simple égalité des min ou des max des extrêmes et des moyens.

3.4 Réduction à une forme canonique

En combinant les résultats des deux réductions précédentes, pour un quadruplet (a, b, c, d) de nombres positifs rangés par ordre croissant, s'il existe une analogie de puissance p entre ces nombres, alors on peut réduire une analogie quelconque à une forme canonique de la forme suivante

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{a}{d})^p : (\frac{b}{d})^p ::^1 (\frac{c}{d})^p : 1$$

dans laquelle les termes sont dans l'ordre suivant si p est positif

$$(\frac{a}{d})^p \;\geq\; (\frac{b}{d})^p \;\geq\; (\frac{c}{d})^p \;\geq\; 1$$

mais dans l'ordre suivant si p est négatif

$$(\frac{a}{d})^p \;\leq\; (\frac{b}{d})^p \;\leq\; (\frac{c}{d})^p \;\leq\; 1.$$

Une remarque est nécessaire. On a divisé par d, ce qui suppose qu'il soit différent de 0. Or, d étant le max des quatres nombres positifs a, b, c et d, il faut examiner le cas particulier où $d = 0$. Dans ce cas, par le fait que d est le maximum et que les nombres sont positifs on a : $a = b = c = d = 0$. L'analogie en p est donc vraie, et elle est même vraie pour tout p (en définissant de manière adéquate, par limite, la valeur que l'on attribue à 0^0 ; par souci de continuité, on posera que $0^0 = 0$).

Chapitre 4

Existence et unicité de p pour un quadruplet quelconque

Soit un quadruplet de nombres a, b, c et d de $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tels que $a < b < c < d$, avec inégalité stricte. Nous montrons qu'il existe alors un p pour lequel il existe une analogie entre a, b, c et d, et que de plus ce p est unique. C'est-à-dire,

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \;\; a < b < c < d \;\; \Rightarrow \;\; \exists! p \in \mathbb{R} \;\; / \;\; m_p(a, d) = m_p(b, c)$$

autrement dit,

$$\exists! p \in \mathbb{R} \;\; / \;\; \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)} \tag{4.1}$$

Comme, étant donnés quatre nombre réels différents deux à deux, on peut toujours les ordonner, on interprète la proposition précédente de la façon suivante :

> quels que soient quatre nombres réels donnés, on peut toujours voir une analogie entre eux et cette analogie est unique.

On peut aussi dire :

> il y a toujours un angle, et il est unique, sous lequel on peut voir une analogie entre quatre nombres quelconques, à condition de les ordonner par ordre croissant.

4.1 Définition de δ

On définit d'abord la fonction en p suivante

$$\delta(p) = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(a^r + d^r)} - \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{2}(b^r + c^r)}$$

Cette fonction est simplement la différence entre la partie gauche et la partie droite de l'équation (4.1).

4.2 Continuité de δ

La fonction δ étant la différence de deux fonctions $m_p(a, d)$ et $m_p(b, c)$ toutes deux continues sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$. En 0, la limite est $\sqrt{ad} - \sqrt{bc}$.

4.3 Valeurs extrêmes de δ

Considérons le cas où p tend vers $-\infty$. Rappelons que l'on a supposé a, b, c et d ordonnée strictement de façon croissante. La fonction δ tend donc vers la valeur $\min(a, d) - \min(b, c) = a - b$. Maintenant, a étant inférieur à b, la valeur limite en $-\infty$ est négative.

$$\lim_{p \to -\infty} \delta(p) = a - b < 0$$

Pour le cas où p tend vers $+\infty$, on a le même raisonnement en remplaçant min par max : $\max(a, d) - \max(b, c) = d - c$. La valeur obtenue, $d - c$ est positive parce que $c < d$.

$$\lim_{p \to +\infty} \delta(p) = d - c > 0$$

4.4 Existence de p pour un quadruplet quelconque

Le fait que δ soit continue et comprise entre deux valeurs l'une négative à gauche, l'autre positive à droite, implique par le théorème des valeurs intermédiaires de Cauchy que p existe.

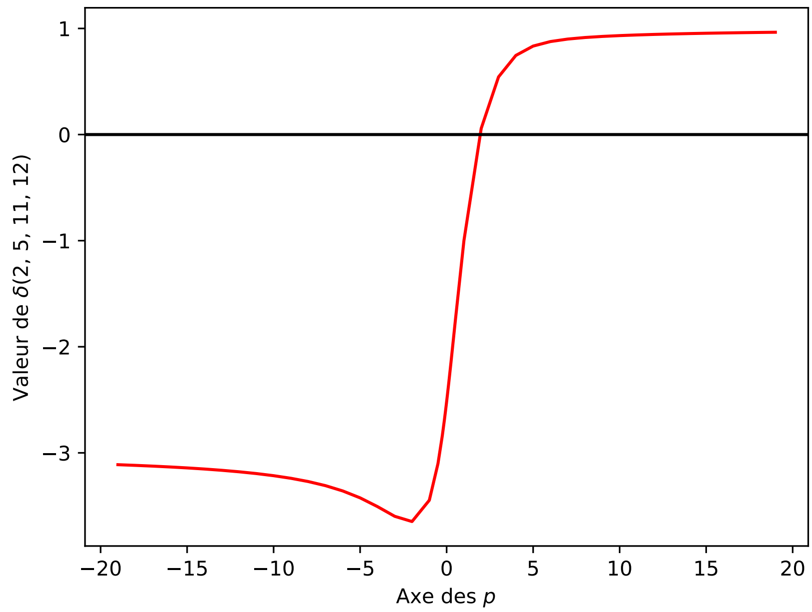

FIGURE 4.1 – Courbe de la fonction δ pour le quadruplet $(a, b, c, d) = (2; 5; 11; 12)$. La courbe n'est pas strictement croissante.

4.5 Croissance de δ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$

La fonction $\delta(p)$ n'est pas nécessairement strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$. La figure 4.1 illustre ce point pour des valeurs particulières. On ne peut donc pas se servir d'un argument de croissance stricte pour conclure à l'unicité de p.

4.6 Unicité de p pour un quadruplet quelconque

4.6.1 Résultat préliminaire : l'existence de deux puissances implique l'existence de trois puissances

On montre d'abord que s'il y a deux analogies, alors il y en a en réalité trois. Soient donc p et q les abscisses de deux points d'intersection des courbes des moyennes généralisées de a, d et de b, c. Comme a et d encadrent b et c, la courbe pour b, c passe en p sous celle de a, d en venant de $-\infty$ et au dessus en q en venant de $+\infty$. Elle est donc à la fois en dessous et au dessus entre les deux valeurs p et q. Il existe donc une valeur r entre p et q correspondant à un troisième point d'intersection. Soit r est négatif et l'on a deux valeurs négatives p et r ; soit r est positif et l'on a deux valeurs positives r et q. Ci-dessous on montre que chacun de ces deux cas mène à une contradiction.

4.6.2 Cas où deux des valeurs de puissance sont positives

Supposons qu'il existe deux valeurs $0 < r < q$ telles que l'on ait l'analogie. On se restreint au cas $0 < a < b < c < 1$ en divisant par d grâce au résultat vu en 3.2.2.

$$a : b ::^r c : 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^r + c^r - 1 = a^r$$

$$\begin{aligned}
a : b ::^q c : 1 \quad &\Leftrightarrow \quad b^q + c^q - 1 = a^q \\
&\Leftrightarrow \quad b^q + c^q - 1 = a^r \times a^{q-r} \\
&\Leftrightarrow \quad b^q + c^q - 1 = (b^r + c^r - 1) \times a^{q-r} \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1 - (b^q + c^q)}{1 - (b^r + c^r)}}_{>1} = \underbrace{a^{q-r}}_{<1}
\end{aligned}$$

La dernière ligne se justifie de la manière suivante. D'une part $b^q + c^q < b^r + c^r$ car $0 < b < c < 1$ et $0 < r < q$, d'où le rapport supérieur à 1. D'autre part $a^{q-r} < 1$ car $a < 1$ et $q - r > 0$. Cette ligne énonce une contradiction : il ne peut donc exister deux analogies pour le même quadruplet.

4.6.3 Cas où deux des valeurs de puissance sont négatives

Pour deux valeurs négatives $p < r < 0$, la même démonstration vaut en utilisant l'analogie équivalente vue en 3.1, à savoir que si l'on a l'analogie

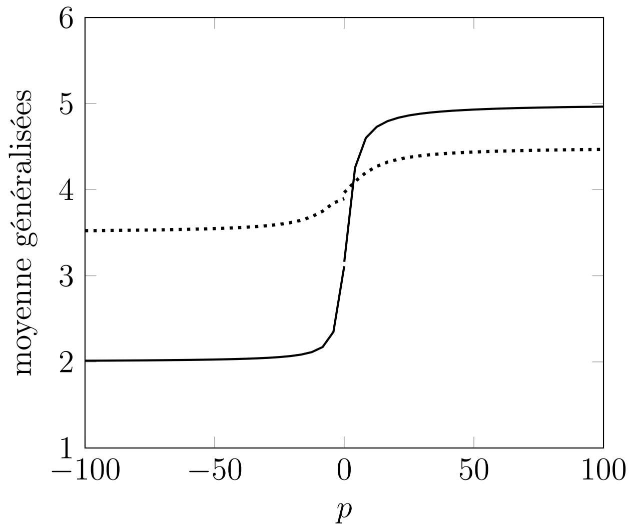

FIGURE 4.2 – En plein, valeurs des moyennes généralisées de a et d pour $a = 2$ et $d = 5$, avec p en abscisse. En pointillé, même chose avec deux nombres $b = 3{,}5$ et $c = 4{,}5$. La valeur de p telle que l'on ait l'analogie $a : b ::^p c : d$ est donnée par l'intersection des courbes pleine et pointillée. En l'occurrence $p \simeq 3{,}06$.

$a : b ::^p c : d$, alors on a aussi l'analogie $1/a : 1/b ::^{-p} 1/c : 1/d$.

4.6.4 Cas $p = 0$

Pour être complet, comme cas particulier, se demander si $p = 0$ revient seulement à vérifier l'unicité du cas $bc = ad$.

4.6.5 Visualisation

La figure 4.2 visualise l'unicité de p pour des valeurs particulières de a, b, c et d.

4.6.6 Calcul de p en pratique

En pratique, le calcul de p pour un quadruplet de nombres positifs peut s'implémenter par recherche dichotomique et p peut être calculé avec une précision fixée à l'avance qui servira de critère d'arrêt. On lancera bien sûr cette recherche dichotomique après s'être assuré que le quadruplet ne correspond pas à un cas particulier de p nul ou infini.

Chapitre 5

Remarques

5.1 Résolution d'analogie

Soient a, b et c des nombres réels positifs non-nuls rangés par ordre croissant et p un nombre réel quelconque, il est trivial qu'il existe une solution unique à l'équation suivante dans le cas où $p \neq 0$:

$$a^p + x^p = b^p + c^p,$$

ou à l'équation suivante correspondant au cas où $p = 0$:

$$\sqrt{a \times x} = \sqrt{b \times c}.$$

Autrement dit, il existe une solution unique à l'équation analogique

$$a : b ::^p c : x.$$

Dans le cas $p = -\infty$ ou $+\infty$, il faut détailler les cas. Dans certains cas, la solution est unique car devant être égale au min ou au max, dans d'autres cas tout nombre supérieur au min ou inférieur au max faisant l'affaire, la solution ne sera pas unique.

Il est clair que la même chose peut être dite pour les cas où l'inconnue n'est pas d mais a ou b ou c.

5.2 Condition à l'existence de p

D'après les huit formes équivalentes de l'analogie, les deux extrêmes sont interchangeables. De même pour les deux moyens. En plus, les moyens et les extrêmes jouent aussi le même rôle par inversion des rapports.

La démonstration de l'existence de p pour le cas où les quatre nombres donnés (différents deux à deux, soulignons) sont ordonnés repose sur la possibilité que les courbes des moyennes généralisées des extrêmes et des moyens s'intersectent. Autrement dit, p existe si et seulement si les extrêmes encadrent les moyens, ou inversement les moyens encadrent les extrêmes.

5.3 Réordonnancement de quatre termes quelconques

Dans les développements donnés en 4.6, nous avons supposé les quatre nombres rangés par ordre croissant. En fait, comme vu juste au-dessus, nous pouvons nous contenter que les extrêmes encadrent les moyens ou bien l'inverse.

Tout quadruplet n'étant pas forcément ordonné, il faut s'interroger sur les différentes possibilités. Un raisonnement de combinatoire élémentaire (24 possibilités), combiné aux huit formes équivalentes de l'analogie ($24 \,/\, 8 = 3$), montre qu'il n'y a en fait que trois réordonnancements pertinents du point de vue de l'analogie (voir, par exemple [Lepage (2003), p. 119]) :

$$a : b :: c : d \quad \text{ou} \quad a : c :: d : b \quad \text{ou} \quad a : d :: b : c.$$

Ce qui a été dit au chapitre 4, à savoir que l'on peut toujours voir une analogie entre quatre nombres, est donc vrai pour un quadruplet quelconque non nécessairement ordonné, à condition de préciser quel réordonnancement y est appliqué.

Notons que le cas $a = b = c = d$ est très particulier, car il n'oblige à aucun réordonnancement. Dans ce cas, les 24 différentes écritures sont toutes possibles et équivalentes. Nous poursuivons le traitement de tels cas ci-dessous.

5.4 Cas d'égalité

Avec la remarque ci-dessus, nous venons de rencontrer un cas d'égalité. Nous les étudions maintenant.

Cas d'égalité $b = c$ seulement. Supposons les termes de l'analogie rangés dans l'ordre a, b, c, d. Il est possible que b soit égal à c. C'est l'analogie continue. Dans ce cas, il est clair que, si $a \neq d$ (et a et d tous deux différents de b), p est unique et est donné par l'intersection de la droite horizontale $y = b = c$ avec la courbe des moyennes généralisées de a et d, puisque c'est une fonction continue et strictement croissante.

Cas d'égalité $a = b$ et $c = d$. Dans ce cas, les deux courbes de moyennes généralisées pour a et d et pour b et c se superposent. La puissance pour l'analogie n'est pas unique puisque tout p de $\mathbb{R}$ permet d'écrire l'égalité de la moyenne quelle qu'elle soit. Les valeurs $-\infty$ et $+\infty$ sont, elles aussi, possibles. Il n'y a donc pas unicité de p dans ce cas.

Cas d'égalité $a = d$. Les termes a et d étant les extrêmes, c'est-à-dire les max et les min des termes de l'analogie on a alors nécessairement $a = b = c = d$. Dans ce cas, l'analogie en p est vraie pour tout p dans $]-\infty; +\infty[$ et même pour $p = -\infty$ ou $+\infty$. Il n'y a donc pas unicité de p dans ce cas.

En 3.2.2, nous avions divisé par d, ce qui suppose qu'il soit différent de 0. Si d tend vers 0 et qu'il est le maximum des quatre nombres positifs a, b, c et d, on aura forcément à la limite $a = b = c = d = 0$. Comme vu ci-dessus, l'analogie sera alors vraie pour toute valeur de p, et même pour $p = 0$ en définissant de manière adéquate, par limite, la valeur que l'on attribue à 0^0. Par souci de continuité, on posera à la limite que $0^0 = 0$.

5.5 Cas particulier des booléïens

L'analogie entre booléïens a été présentée et étudiée dans plusieurs travaux, comme par exemple [Prade et Richard (2017a)] ou [Couceiro *et coll.* (2017)Couceiro, Hug, Prad
Nous établissons ici le lien avec l'analogie en puissance p.

Pour établir le lien entre booléïens et nombres réels, nous notons évidemment les valeurs faux et vrai par 0 et 1. Il y a fondamentalement trois analogies possibles entre booléïens :

$$0 : 0 :: 0 : 0 \quad \text{ou} \quad 0 : 0 :: 1 : 1 \quad \text{ou} \quad 1 : 1 :: 1 : 1$$

La deuxième analogie peut en particulier être réécrite de façon équivalente en $0 : 1 :: 0 : 1$, ou en $1 : 1 :: 0 : 0$, ou encore en $1 : 0 :: 1 : 0$ grâce aux formes équivalentes.

Les trois analogies fondamentales ci-dessus correspondent au cas $a = b = c = d$ pour la première et la troisième et au cas $a = b$ et $c = d$ pour la deuxième. Il est donc intéressant de noter que dans tous ces cas, de par ce qui a été vu plus haut pour les cas d'égalité, il n'y a pas unicité de p, et toutes les valeurs, y compris les valeurs infinies sont valables.

Mais il est aussi possible d'envisager l'analogie

$$0 : 1 :: 1 : 0$$

qui est équivalente à $1 : 0 :: 0 : 1$ par inversion des rapports (cf. [Klein (1982)] pour une occurrence en pratique de ce cas). Ces deux formes équivalentes de la même analogie s'expliquent en considérant que le rapport est la négation logique. L'égalité des rapports fait alors leur validité.

Or cette analogie ne constitue pas un prolongement du modèle qui étend les formules d'analogie entre ensembles aux booléïens [Lepage (2023)] ou encore ne permet pas une justification fondée sur la minimalité de complexité algorithmique [Prade et Richard (2017b)]. Cette analogie n'entre pas non plus dans le modèle d'analogie en puissance p pour la simple raison que les termes ne sont pas rangés dans un ordre croissant quelles que soient les formes équivalentes considérées.

Chapitre 6

Discussion

6.1 Moyenne généralisée et barycentre

Nous avons vu que dans le cas de deux réels positifs non-nuls a et d, les moyennes généralisées prenaient leurs valeurs entre a et d. Géométriquement, toute moyenne généralisée est donc un point du segment $]a, d[$. Il se caractérise donc par un $\lambda \in]0; 1[$ tel que

$$m_p(a, d) = \lambda a + (1 - \lambda)d$$

La fonction qui à p associe λ est une fonction caractéristique de a et d. Il serait intéressant de l'étudier. Et l'on peut aussi s'intéresser à la fonction inverse qui à λ associe p.

6.2 Approximation de la fonction moyenne généralisée par la fonction sigmoïde

La fonction sigmoïde est définie par $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Le profil de la courbe des moyennes généralisées de deux nombres ressemble à celle de la fonction sigmoïde, aux réserves près que nous avons pu par exemple exprimer sur l'absence de symétrie centrale.

Il est évidemment possible en introduisant des paramètres de translater, de recadrer er de ré-incliner la fonction sigmoïde afin de la faire s'approcher au mieux la fonction moyenne généralisée. On peut donc s'interroger sur les paramètres à introduire qui permettent de minimiser l'écart entre ces deux fonctions.

Ceci fait, et étant données deux approximations de la fonction moyenne généralisée pour deux couples a, d et b, c, on pourra alors se demander si l'on peut calculer rapidement la puissance en p pour leur analogie $a : b ::^p c : d$ avec un écart le plus petit possible..

6.3 Suites d'entiers

On se fixe une puissance p au hasard. On se donne trois nombres entiers a, b et c au hasard. On calcule le d. On réitère alors, soit sur b, c, d par glissement de 1, soit sur c, d et e par glissement de 2. Dans ce dernier cas, comment calcule-t-on le e ? Le critère d'arrêt est que d n'est pas entier. Quelles suites d'entiers obtient-on ?

On se donne quatre nombres entiers a, b, c et d au hasard. On calcule le motif de l'analogie et la puissance en p pour laquelle il y a analogie. On applique alors le même ordre et la même puissance pour résoudre l'analogie avec b, c et d. et on réitère. Quelles suites d'entiers obtient-on ?

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Nous avons étudié le lien entre analogie et moyennes, plus exactement, moyennes généralisées, et nous nous sommes servis de cette notion comme levier pour généraliser et définir les analogies en puissance p. Les analogies classiques, arithmétique et géométrique, ne sont évidemment que les cas particuliers en $p = 0$ et en $p = 1$ d'analogies en puissance p.

En particulier, nous avons montré que, quels que soient quatre nombres réels positifs, il est toujours possible de voir une analogie entre eux, grâce à un réordonnancement et à une puissance bien choisie unique si les nombres sont différents deux à deux. On peut paraphraser et dire qu'il y a généralement une unique perspective – un réordonnancement et une puissance – sous laquelle on peut voir une analogie entre quatre nombres positifs quelconques.

Pour un problème particulier à traiter, la question se posera de savoir quels sens prennent le réordonnancement nécessaire pour trier les nombres et la valeur numérique de la puissance. Il ne semble pas *a priori* que la valeur de la puissance exprime une force quelconque de l'analogie, mais son interprétation devra sans doute se faire en fonction des données du problème traité.

Nous avons aussi montré que toute analogie peut se réduire (par bijection) à une forme canonique, ce qui donne lieu à une infinité d'analogies équivalentes. En particulier, cela montre que toutes les analogies, y compris les analogies classiques, peuvent être traitées au moyen d'une analogie arithmétique équivalente.

Ce travail ouvre de nouvelles pistes. Tout d'abord nous nous sommes restreints au cas de valeurs positives, et il est naturel de s'interroger sur l'extension à tout les réels pour ouvrir la voie au traitement de représentations comprenant des valeurs négatives. On peut même envisager une extension aux nombres complexes.

Un autre piste, déjà mentionnée ci-dessus, concerne la sémantique du paramètre p qui, d'une certaine façon, résume l'information implicite dans a, b, c et d à leur analogie en p, soit $a : b ::^p c : d$. On peut donc s'interroger sur la possibilité de fusionner l'information contenue dans un quadruplet de nombres par la seule donnée de la puissance de leur analogie.

Remerciements

Cette étude est le fruit d'une collaboration rendue possible par le séjour en sabbatique du premier auteur auprès de l'organisme du second auteur. Les auteurs adressent leurs remerciements à la section pour la promotion de la recherche de l'université Waseda et à la chaire internationale du LORIA pour leurs financements.

Les travaux présentés ici ont aussi bénéficié d'une subvention de recherche de la Société japonaise pour la promotion de la science, de type Kiban C, n^{o} 21K12038, intitulée « Algorithmes théoriquement fondés pour l'extraction automatique de jeux de tests d'analogie en traitement automatique des langues ».

Enfin, ces travaux ont été en partie soutenus par le projet ANR-22-CE23-0023 intitulé « Analogies : de la théorie aux outils et applications (AT2TA) ».

Mentionnons pour terminer que l'essentiel de ces notes ont été publiées dans la conférence « Plateforme française d'intelligence artificielle » (voir [Lepage et Couceiro (2024)] en bibliographie).

Bibliographie

[Aristote (1997)] ARISTOTE : *Éthique à Nicomaque*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, [1er tirage 1990] édition, 1997. Trad. J. Tricot.

[Couceiro *et coll.* (2017)Couceiro, Hug, Prade, et Richard] Miguel COUCEIRO, Nicolas HUG, Henri PRADE et Gilles RICHARD : Analogy-preserving functions : A way to extend Boolean samples. *In Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2017)*, pages 1575–1781, Melbourne, Australia, August 2017.

[Euclide (1632)] EUCLIDE : *Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide : plus le livre des donnez... trad. en françois*. I. Dédin, Paris, 1632. Trad. D. Henrion.

[Hölder (1882)] Otto Ludwig HÖLDER : Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. *Mathematische Annalen*, 20(4):535–549, mar 1882. URL `https://doi.org/10.1007/BF01540142`.

[Klein (1982)] S. KLEIN : Culture, mysticism and social structure and the calculation of behavior. *In Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 1982)*, pages 141–146, 1982.

[Lepage (2003)] Yves LEPAGE : *De l'analogie rendant compte de la commutation en linguistique*. Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université de Grenoble, mai 2003. URL `https://theses.hal.science/tel-00004372`.

[Lepage (2023)] Yves LEPAGE : Formulae for the solution of an analogical equation between Booleans using the Sheffer stroke (NAND) or the Pierce arrow (NOR). *In* Miguel COUCEIRO, Pierre-Alexandre MURENA et Stergos AFANTENOS, rédacteurs en chef : *Proceedings of the Workshop Interactions between analogies and machine learning, colocated with IJCAI 2023 (IARML@IJCAI 2023)*, pages 3–14, August 2023. URL `https://ceur-ws.org/Vol-3492/paper1.pdf`.

[Lepage et Couceiro (2024)] Yves LEPAGE et Miguel COUCEIRO : Analogie et moyenne généralisée. *In* Jean-Guy MAILLY, François SCHWARZENTRUBER et Anaelle WILCZYNSKI, rédacteurs en chef : *Actes des 18es*

Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale et des 19es Journées Francophones sur la Planification, la Décision et l'Apprentissage pour la conduite de systèmes (JIAF 2024 et JFPDA 2024), pages 114–124, La Rochelle, France, Juillet 2024. URL `https://hal.science/AFIA/hal-04620491v1`.

[Michel (1949)] Paul-Henri Michel : Les médiétés. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 2(2):139–178, 1949.

[Prade et Richard (2017a)] Henri Prade et Gilles Richard : Analogical proportions and analogical reasoning - an introduction. *In* David W. Aha et Jean Lieber, rédacteurs en chef : *Case-Based Reasoning Research and Development*, pages 16–32, Cham, 2017a. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-61030-6.

[Prade et Richard (2017b)] Henri Prade et Gilles Richard : Boolean analogical proportions - axiomatics and algorithmic complexity issues. *In* Alessandro Antonucci, Laurence Cholvy et Odile Papini, rédacteurs en chef : *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, pages 10–21, Cham, 2017b. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-61581-3.

[Rallier des Ourmes (1751–1772)] Jean Joseph Rallier des Ourmes : Proportion. *In Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*. Chez Briasson, David, Le Breton ou Durand, Paris, 1751–1772. URL `https://fr.wikisource.org/wiki/L%E2%80%99Encyclop%C3%A9die/1re_%C3%A9dition/PROPORTION`.

[Vitrac (1996)] Bernard Vitrac : La définition V. 8 des Eléments d'Euclide. *Centaurus*, 38(2–3):97–121, 1996. URL `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00175156`.